Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 1
9. Oktober 2016

Analysis III
im Wintersemester 2016/2017

Ablauf: Die Übung findet in der Regel wöchentlich mittwochs ab 9:00 Uhr im Seminarraum C113 statt. Der erste Übungstermin ist der 19. Oktober 2016. Am 12. Oktober 2016 findet eine Vorlesung statt. Die Übungsblätter können unter

http://www.tu-ilmenau.de/analysis/team/philipp-schmitz/

heruntergeladen werden. Die Aufgaben des jeweiligen Übungsblattes sollen gelöst und zu Beginn der nächsten Übung abgeben werden. Eine Abgabe in Zweiergruppen ist erwünscht.

Schein: Zum Erhalt des Scheins „Analysis III“ als eine Prüfungsvorleistung für die Prüfung „Analysis III/IV“ werden folgende Anforderungen gestellt:

(i) Es müssen mindestens 50 % der in der Übung erreichbaren Punkte erreicht werden.

(ii) Es müssen mindestens zwei Aufgabe in der Übung an der Tafel vorgerechnet werden. Jede weitere vorgerechnete Übungsaufgabe wird mit bis zu 2 Zusatzpunkten belohnt.

Über den Erhalt des Scheins wird schließlich im Rahmen einer mündlichen Rücksprache am Ende des Semesters entschieden.

Abgabe: In der ersten Übung am 19. Oktober 2016

Definition: Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zwei Normen $\|\cdot\|_1 : X \to \mathbb{R}$ und $\|\cdot\|_2 : X \to \mathbb{R}$ heißen *äquivalent*, wenn es positive Konstanten $m, M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$

für alle $x \in X$ gilt.

Aufgabe 1: Zeige, dass alle Normen auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ äquivalent sind.
Hinweis: Untersuche die Beziehung einer beliebigen Norm zur Maximumsnorm

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Aufgabe 2: Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$ der reellwertigen $(n \times n)$-Matrizen mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation. Es sei $\|\cdot\|_V$ eine Vektornorm in $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die durch $\|\cdot\|_V$ *induzierte* Matrixnorm, das heißt

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V}, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(i) Zeige, dass $\left(\mathbb{R}^{n\times n}, \|\cdot\|\right)$ ein normierter Vektorraum ist.

(ii) Ist $\left(\mathbb{R}^{n\times n}, \|\cdot\|\right)$ vollständig?

Aufgabe 3: Es sie $\|\cdot\|_2$ die durch die euklidische Norm induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ (vergleiche Aufgabe 2). Zeige, dass für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\|A\|_2 = \max\Big\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\Big\}$$

gilt.

Aufgabe 4: Überprüfe die folgenden Kurven auf Rektifizierbarkeit und berechne gegebenenfalls die Bogenlänge:

(i) $f_1 : [0, 2\pi] :\to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t), ct)$ für $c, r > 0$,

(ii) $f_2 : [-2\pi, 2\pi] :\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (e^{ct}\cos(t), e^{ct}\sin(t))$ für $c > 0$,

(iii) $f_3 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$,

$$t \mapsto \begin{cases} \left(t\sin\left(\frac{1}{t}\right), t\right), & 0 < t \leq 1 \\ (0, 0), & t = 0. \end{cases}$$