Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 10
13. Dezember 2016

Analysis III

im Wintersemester 2016/2017

Änderungen: Die Vorlesungen am Montag, den 19. Dezember, und Dienstag, den 20. Dezember, fallen aus. Am Mittwoch, den 21. Dezember, findet anstelle der Übung eine Vorlesung statt.

Abgabe: In der Übung am 11. Januar 2017

Aufgabe 37: Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : I \to \mathbb{K}^{2\times 2}$ eine stetige Abbildung. Die Differentialgleichung

$$y' = A(x)y \tag{1}$$

besitze die spezielle Lösung $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : I \to \mathbb{K}^2$. Es gelte $\varphi_1(x) \neq 0$ für alle $x \in J \subset I$, wobei J ein Teilintervall von I sei. Zeige, dass man eine zweite von φ linear unabhängige Lösung $\psi : J \to \mathbb{K}^2$ von (1) durch den Ansatz

$$\psi(x) = u(x)\varphi(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

erhält, wobei $u, g : J \to \mathbb{K}$ stetig differenzierbare Funktionen sind, die den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$g' = \left(a_{22}(x) - a_{12}(x)\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \right) g, \quad u' = \frac{a_{12}(x)}{\varphi_1(x)} g.$$

Definition: Es sei $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ eine stetige Abbildung über dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Unter einem *Fundamentalsystem* der linearen Differentialgleichung $y' = A(x)y$ versteht man eine Basis $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ des Vektorraums der Lösungen. Hierbei ist $\varphi_k = (\varphi_{1k}, \dots, \varphi_{nk})^T : I \to \mathbb{K}^n$ für alle $k = 1, \dots, n$. Die Abbildung

$$\Phi = \left(\varphi_1, \dots, \varphi_n\right) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix} : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$$

bezeichnet man als *Fundamentalmatrix*.

Aufgabe 38: Es sei $A \subset \mathbb{R}^{n\times n}$. Das *Matrixexponential* sei definiert als

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Zeige, dass die Reihe für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$ konvergiert und die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \mapsto e^{Ax}$ differenzierbar ist. Folgere, dass $\varphi(x) = e^{A(x-x_0)}y_0$ für $y_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = Ay$ zum Anfangswert $y(x_0) = y_0$ ist. Gib außerdem ein Fundamentalsystem und eine Fundamentalmatrix dieser linearen Differentialgleichung an.

Aufgabe 39: Bestimme jeweils ein Fundamentalsystem und eine Fundamentalmatrix der folgenden Differentialgleichungssysteme

$$\text{(i)}\quad y' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} y, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \text{(ii)}\quad y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y, \qquad \text{(iii)}\quad y' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix} y$$

Aufgabe 40: Gegeben sei eine Fundamentalmatrix $\Phi : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ des linearen Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y$ für die stetige Funktion $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$. Weiterhin sei $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine invertierbare (konstante) Matrix. Zeige, dass $C\Phi$ genau dann eine Fundamentalmatrix dieser Differentialgleichung ist, wenn

$$CA(x) = A(x)C$$

für alle $x \in I$ gilt.

Schöne Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr