Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 11
17. Januar 2017

Analysis III
im Wintersemester 2016/2017

Abgabe: In der Übung am 18. Januar 2017

Aufgabe 41 (5 Punkte)**:** Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + \frac{1}{x}y_2 + \ln x + \frac{1}{x}, \\ y_2' &= (1-x)y_1 + y_2 + (x-1)\ln x \end{aligned}$$

auf $(0, \infty)$.
Hinweis: Eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems ist die Funktion $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1, x)^T$.

Aufgabe 42 (10 Punkte)**:** Es seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ reelle Zahlen, sodass

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$$

gilt. Zu $p \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, $p(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $q \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ betrachten wir das *Sturm-Liouville-Problem*

$$-(py')' + qy = f$$

für $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ mit den Randbedingungen

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \tag{1}$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \tag{2}$$

Wir definieren die lineare Abbildung $L : \mathcal{D} \to \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &:= \left\{ y \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C}) : y \text{ erfüllt (1) und (2)} \right\}, \\ Ly &:= -(py')' + qy, \quad y \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Es existieren (vgl. Satz von Picard-Lindelöff) Funktionen $y_a, y_b \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$, sodass $-(py_a')' + qy_a = 0 = -(py_b')' + qy_b$ gilt, wobei y_a die Randbedingung (1) und y_b die Randbedingung (2) erfüllt.

(i) Zeige, dass für die *Wronski-Determinante* $W : [a, b] \to \mathbb{C}$,

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} y_a(x) & y_b(x) \\ y_a'(x) & y_b'(x) \end{pmatrix}$$

die folgenden Aussagen gelten:

(a) Für alle $x \in [a, b]$ gilt $(pW)'(x) = 0$, d. h. pW ist konstant.

(b) Ist die Abbildung L injektiv, so gilt $W(a) \neq 0$.

(ii) Es seien L injektiv, $c := -\big(p(a)W(a)\big)^{-1}$ und $g : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$ eine *Greensche Funktion* mit

$$g(x, t) := \begin{cases} c y_a(x) y_b(t), & \text{falls } a \leq x \leq t \leq b \\ c y_a(t) y_b(x), & \text{falls } a \leq t \leq x \leq b. \end{cases}$$

Die Abbildung $G : \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ sei erklärt durch

$$(Gf)(x) := \int_a^b g(x, t) f(t) \,\mathrm{d}t.$$

Beweise, dass $\mathcal{D} = \mathrm{Bild}(G)$, $\mathrm{Kern}(G) = \{0\}$, $LGf = f$ für alle $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ sowie $GLh = h$ für alle $h \in \mathcal{D}$ gilt.

(iii) Zeige, dass eine Funktion φ genau dann ein Eigenvektor von L zum Eigenwert λ ist, wenn φ ein Eigenvektor von G zum Eigenwert λ^{-1} ist. Was gilt in diesem Fall für die Dimension des Raumes $\ker(\lambda I - L) = \ker(\lambda^{-1} I - G)$?

Aufgabe 43 (5 Punkte)**:** Beweise, dass

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}$$

für $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom n-ten Grades ist und die *Hermitesche* Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

auf $\mathbb{R}$ löst. Weise außerdem nach, dass für $n \neq m$ die *Hermite-Polynome* H_n und H_m bezüglich des gewichteten Skalarproduktes

$$(f, g) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$$

orthogonal zueinander sind.

Hinweis: Betrachte zur Untersuchung der Orthogonalität Funktionen der From $f_n(x) := H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ *und nutze, dass* H_n *eine Lösung ist.*