Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 13
25. Januar 2017

Analysis III

im Wintersemester 2016/2017

Abgabe: In der Übung am 1. Februar 2017

Satz 3. *Es seien*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist für das Differentialgleichungssystem $y' = (\lambda E + N)y$ durch

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}, \quad \Phi(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem mit $\Phi(0) = E$ gegeben.

Aufgabe 48 (5 Punkte)**:** Beweise, den obigen Satz.
Hinweis: Verwende dazu den Ansatz $y(t) = e^{\lambda t} z(t)$ und zeige, dass y genau dann eine Lösung von $y' = (\lambda E + N)y$ ist, wenn $z' = Nz$ erfüllt ist. Bestimme anschließend für $c \in \mathbb{C}^n$ eine Lösung von $z' = Nz$ mit der Anfangsbedingung $z(0) = c$.

Aufgabe 49 (8 Punkte)**:** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Berechne Matrizen $J, S \in \mathbb{C}^{4\times 4}$, sodass $\det(S) \neq 0$ und $S^{-1}AS = J$ gilt, wobei J die *Jordan-Normalform* von A ist. Bestimme dazu die Eigenwerte von A, sowie die zugehörigen Eigenvektoren und gegebenenfalls Ketten von Hauptvektoren.

Löse anschließend das Anfangswertproblem

$$y' = Ay + b, \quad b(t) := e^{2t} \cdot (1, 1, 5, 0)^T, \quad y(0) = 0.$$

Bestimme dazu mit Hilfe von Satz 3 ein Fundamentalsystem des homogenen Systems.
Hinweis: Die Invertierung von Matrizen darf mit Hilfe eines CAS (Mathematica, Maple, etc.) vorgenommen werden.

Definition (*Laplace-Transformation*)**.** Es seien $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma, C > 0$, sodass $|f(t)| \leq Ce^{\gamma t}$ für alle $t \geq 0$ gilt. Die Funktion $\mathcal{L}(f) : \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \gamma\} \to \mathbb{C}$ mit

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st} \, \mathrm{d}t := \lim_{x \to \infty} \int_0^x f(t)e^{-st} \, \mathrm{d}t$$

heißt *Laplace-Transformierte* von f.

Aufgabe 50 (7 Punkte)**:** Es seien $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen und Konstanten $\gamma, C > 0$, sodass $|f(t)| \leq Ce^{\gamma t}$ und $|g(t)| \leq Ce^{\gamma t}$ für alle $t \geq 0$ gilt. Zeige die Linearität der Laplace-Transformation $\mathcal{L}$, das heißt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g).$$

Zeige weiterhin, dass für $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Aussagen

(i) $\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}$ für $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$,

(ii) $\mathcal{L}(\sin(at))(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$ für $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} a|$,

(iii) $\mathcal{L}(\cos(at))(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$ für $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} a|$,

(iv) $\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}$ für $\operatorname{Re} s > 0$ und

(v) $\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ für $\operatorname{Re} s > 0$

gelten.
Hinweis: Kosinus und Sinus sind für $z \in \mathbb{C}$ definiert durch $\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ *und* $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.