Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 2
18. Oktober 2016

Analysis III

im Wintersemester 2016/2017

Abgabe: In der Übung am 26. Oktober 2016

Aufgabe 5: Zeige, dass die Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y)^T \mapsto \begin{cases} 0, & x = y = 0 \\ xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

zweimal partiell differenzierbar ist. Gilt $D_1D_2F(x,y) = D_2D_1F(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$?

Aufgabe 6: Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion sowie $x_0 \in U$ und $c := f(x_0)$. Zeige, dass der Gradient $\operatorname{grad} f(x_0)$ senkrecht auf der Niveaufläche

$$N_f(c) = \{x \in U : f(x) = c\}$$

steht, das heißt für jede stetig differenzierbare Kurve $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(0) = x_0$ und $\varphi((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset N_f(c)$ gilt

$$\langle \varphi'(0), \operatorname{grad} f(x_0)\rangle = 0.$$

Definition: Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Menge $\mathbb{R}^n$ heißt *Lipschitz-stetig* mit der *Lipschitzkonstante* $L > 0$, wenn für alle $x, y \in \mathbb{U}$

$$\|f(x) - f(y)\| \le L \cdot \|x - y\|$$

gilt.

Aufgabe 7: Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel, $K > 0$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\|Df(x)\| \le K$ für alle $x \in U$. Zeige, dass f Lipschitz-stetig ist. Ist f gleichmäßig stetig?

Aufgabe 8: Untersuche die nachfolgenden Funktionen auf totale Differenzierbarkeit und bestimme gegebenfalls die totale Ableitung:

(i) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^TAx$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

(ii) $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Bx$ mit $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

(iii) $h : (0,\infty) \times (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z)^T \mapsto \left(1 + \ln(x), x\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^T$,

(iv) $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right)$ mit der Euklidischen Norm $\|\cdot\|$,

(v) $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(r,\varphi,z)^T \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)^T$.