Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 5
9. November 2016

Analysis III
im Wintersemester 2016/2017

Ankündigung: Die Vorlesung am Montag, den 14. November 2016, fällt aus.

Abgabe: In der Übung am 16. November 2016

Aufgabe 17: Es seien $\|\cdot\|_V$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|_M$ die durch $\|\cdot\|_V$ induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Weiterhin betrachten wir zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei die Matrix A invertierbar sei und

$$\|B - A\|_M \cdot \|A^{-1}\|_M < 1$$

gelte. Zeige mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass dann auch B invertierbar ist.

Aufgabe 18: Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - u^2 - v &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 &= 1 \end{aligned}$$

in der Nähe des Punktes $(x_0, y_0, u_0, v_0) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$ nach (u, v) aufgelöst werden kann. Gib außerdem die ersten partiellen Ableitungen von u und v bezüglich (x, y) in (x_0, y_0) an.

Aufgabe 19: Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ sowie $g : U \to \mathbb{R}^k$ für $k < n$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Für die Menge

$$U_0 := \{x \in U : g(x) = 0\}$$

habe die Funktion $f|_{U_0}$ ein lokales Maximum (Minimum) in einem Punkt $a \in U_0$, das heißt es existiert eine Umgebung $V \subset U$ von a mit

$$f(x) \leq f(a) \quad (\text{bzw. } f(x) \geq f(a)) \quad \text{für alle } x \in U_0 \cap V.$$

Des Weiteren habe die Jacobimatrix $g'(a)$ vollen Rang. Zeige, dass dann ein Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^k$ existiert, sodass

$$\nabla f(a)^T + \lambda^T g'(a) = 0$$

gilt.

Aufgabe 20: Berechne alle (nach Aufgabe 19) extremwertverdächtigen Punkte

(i) von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x + y + z$ unter der Nebenbedingung, dass der alle Punkte auf der Oberfläche der Einheitskugel liegen;

(ii) von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x + 2y - z$ unter der Nebenbedingung, dass alle Punkte auf der Ellipse liegen, die durch den Schnitt des Zylinders $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 8\}$ und der Ebene $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 4\}$ erzeugt wird.