Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 6
16. November 2016

Analysis III
im Wintersemester 2016/2017

Abgabe: In der Übung am 23. November 2016

Aufgabe 21 (Maximumsprinzip):

(i) Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $\det(f'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$. Zeige, dass die Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x)\|$ kein Maximum besitzt.
Hinweis: Verwende den Satz über die Umkehrabbildung. Nimm an, dass ein Maximum existiere und konstruiere in dessen Nähe einen weiteren Punkt, dessen Funktionswert größer dem des Maximums ist.

(ii) Es seien $V \subset \mathbb{R}^n$ eine (nichtleere) offene, beschränkte Menge und $g : V \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, sodass $g'(x)$ für jedes $x \in V$ invertierbar ist. Außerdem sei g auf dem Abschluss $\overline{V}$ stetig. Zeige, dass die Abbildung $\psi : \overline{V} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|g(x)\|$ ihr Maximum auf dem Rand von V annimmt.

Aufgabe 22: Zeige, dass die Jacobi-Matrix $Df(x_0, y_0, z_0)$ von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + y + z, xy + yz + xz, xyz)$$

im Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ genau dann invertierbar ist, wenn $(x_0 - y_0)(y_0 - z_0)(z_0 - x_0) \neq 0$ gilt. Zeige, dass f in diesem Punkten lokal umkehrbar ist und berechne $Df^{-1}(f(x_0, y_0, z_0))$.

Aufgabe 23: Es seien $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Des Weiteren sei $(a, b) \in U$ ein Punkt, in dem der Gradient $f'(a, b)$ nicht verschwinde. Wir betrachten für $c := f(a, b)$ die Höhenlinie (auch Niveaulinie genannt)

$$N_f(c) = \{(x, y) \in U : f(x, y) = c\}.$$

Zeige, dass sich die Höhenlinie $N_f(c)$ lokal um (a, b) als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion darstellen lässt, das heißt es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ über einem offen Intervall I mit

$$N_f(c) \cap (I \times \varphi(I)) = I \times \varphi(I) \ni (a, b) \quad \text{bzw.} \quad N_f(c) \cap (\varphi(I) \times I) = \varphi(I) \times I \ni (a, b).$$

Aufgabe 24: Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ der Rand des Einheitskreises. Stelle D als Höhenlinie einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dar und begründe, warum sich diese Höhenlinie für jeden Punkt $(x, y) \in D$ lokal um (x, y) als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion φ auffassen lässt (vergleiche Aufgabe 23). Gib außerdem für jeden Punkt $(x, y) \in D$ ein solches φ an.