Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 7
24. November 2016

Analysis III
im Wintersemester 2016/2017

Abgabe: In der Übung am 30. November 2016

Aufgabe 25: Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(i) $y' = e^y \cos x$,

(ii) $y' = \sqrt{1-y^2}$ für $|y| < 1$,

(iii) $y' = (a^2 + x^2)(b^2 + y^2)$ für $a, b > 0$.

Aufgabe 26: Löse die folgenden Differentialgleichungen:

(i) $y' = (x+y)^2$,

(ii) $(1+x^2)y' + xy - xy^2 = 0$.

Verwende hierfür die Substitution $z = x + y$ beziehungsweise $z = 1/y$.

Aufgabe 27: Für ein offenes Rechteck $R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}$ und stetig differenzierbare Funktionen $p, q : R \to \mathbb{R}$ heißt die Differentialgleichung

$$p(x,y) + q(x,y)y' = 0 \tag{1}$$

exakt, falls eine stetig differenzierbare Funktion $F : R \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = p(x,y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = q(x,y)$$

für alle $(x,y) \in R$ gilt. Eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ über einem Intervall I mit $\Gamma_\varphi := \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} : y = \varphi(x)\} \subset R$ heißt *Lösung* der Differentialgleichung (1), falls

$$p(x,\varphi(x)) + q(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$$

für alle $x \in I$ gilt.

(a) Zeige, dass für ein Intervall I und eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $\Gamma_\varphi \subset R$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

  (i) Die Funktion φ ist eine Lösung der Differentialgleichung (1).

  (ii) Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $F(x,\varphi(x)) = c$ für alle $x \in I$ gilt.

(b) Ist die Differentialgleichung (1) exakt mit $(x_0, y_0) \in R$ und $q(x_0, y_0) \neq 0$, dann beweise man, dass ein offenes Intervall I mit $x_0 \in I$ und eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$ existieren. Zeige außerdem: Für jede weitere Lösung $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ mit $x_0 \in \tilde{I}$ und $\tilde{\varphi}(x_0) = y_0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) \quad \text{für alle } x \in I \cap \tilde{I} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

gilt.

Notatation. Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ bezeichne $\mathcal{C}^0(U)$ die Menge der stetigen Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$. Für $k > 0$ sei $\mathcal{C}^k(U)$ die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 28: Betrachte die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit einer $f \in \mathcal{C}^k(G)$ über der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^2$. Zeige, dass jede Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dieser Differentialgleichung in $\mathcal{C}^{k+1}(I)$ liegt.