Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 8
29. November 2016

Analysis III
im Wintersemester 2016/2017

Abgabe: In der Übung am 7. Dezember 2016

Aufgabe 29: Es seien $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ und $g, h : I \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $h \not\equiv 0$ gelte. Zeige, dass das Lösen der *Bernoullischen Differentialgleichung*

$$y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0, \quad x \in I, \tag{1}$$

auf die Lösung einer linearen Differentialgleichung zurückgeführt werden kann. Gib für $x_0 \in I$ und $y_0 > 0$ eine Lösung y von (1) mit $y(x_0) = y_0$ an. Löse anschließend das Anfangswertproblem

$$y' + xy + e^{\frac{3}{2}x^2} y^4 = 0, \quad x \in (0, \infty), \quad y(1) = 1.$$

Hinweis: Betrachte $z = y^{1-\alpha}$.

Aufgabe 30: Untersuche, welche der folgenden Differentialgleichungen exakt sind:

(i) $y + \cos x + (x + 2y)y' = 0$, $R = \mathbb{R}^2$,

(ii) $4x + 3y^2 + 2xyy' = 0$, $R = \mathbb{R}^2$,

(iii) $4 - (y/x)^2 + 2(y/x)y' = 0$, $R = (0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Berechne im Falle der Exaktheit die allgemeine Lösung.
Hinweis: Wende den Satz von Schwarz an, um zu zeigen, dass keine Exaktheit vorliegt.

Aufgabe 31: Löse die folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen mittels Variation der Konstanten:

(i) $y' = y + x, \ x \in \mathbb{R}$, (ii) $y' = xe^{-x^2} - 2xy, \ x \in \mathbb{R}$, (iii) $y' = y + \cos x, \ x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 32: Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 - x^2, \quad y(0) = 1, \tag{2}$$

durch einen Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$. Setze zunächst die formale Reihe in (2) ein und führe einen Koeffizientenvergleich durch. Zeige anschließend (per Induktion), dass für alle Koeffizienten a_k die Abschätzung $|a_k| \leq 1$ gilt. Schließe daraus, dass die formale Lösung y im Intervall $(-1, 1)$ tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems (2) darstellt. Ist diese Lösung (lokal) eindeutig?