Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT **ILMENAU**

Übungsblatt 9
11. Dezember 2016

Analysis III

im Wintersemester 2016/2017

Änderungen: Die Vorlesungen am Montag, den 19. Dezember, und Dienstag, den 20. Dezember, fallen aus. Am Mittwoch, den 21. Dezember, findet anstelle der Übung eine Vorlesung statt.

Abgabe: In der Übung am 14. Dezember 2016

Aufgabe 33: Beweise das Gronwallsche Lemma: *Erfüllt eine stetige Funktion* $h : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ *die Ungleichung*

$$h(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(t)h(t)\,t \quad \textit{für alle } x \in [x_0, x_1] \tag{1}$$

für stetige Funktionen $\alpha : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ *und* $\beta : [x_0, x_1] \to [0, \infty)$*, so gilt*

$$h(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \alpha(t)\beta(t) \exp\left(\int_{t}^{x} \beta(s)\,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t \quad \textit{für alle } x \in [x_0, x_1]. \tag{2}$$

Ist α *monoton wachsend, dann gilt*

$$h(x) \leq \alpha(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} \beta(t)\,\mathrm{d}t\right) \quad \textit{für alle } x \in [x_0, x_1]. \tag{3}$$

Aufgabe 34: Es seien $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : G \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen, die einer Lipschitz-Bedingung mit einer Lipschitz-Konstante $L > 0$ genügen, das heißt

$$\|f(x,y) - f(x,\xi)\| \leq L\|x - \xi\| \quad \text{und} \quad \|g(x,y) - g(x,\xi)\| \leq L\|x - \xi\|, \quad (x,y),(x,\xi) \in G.$$

Für die Anfangswertprobleme

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$
$$z' = g(x,z), \quad z(x_0) = z_0 \in \mathbb{R}^n \tag{5}$$

seien $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (4) und $\psi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (5). Zeige, dass für alle $x \in I$

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq \|y_0 - z_0\| e^{L|x-x_0|} + \frac{M}{L} e^{L|x-x_0|}$$

mit $M := \sup_{(x,y)\in G} \|f(x,y) - g(x,y)\|$ gilt.
Hinweis: Betrachte $h(x) := \|\phi(x) - \psi(x)\| + M/L$.

Aufgabe 35: Wandle die folgenden Differentialgleichungen höherer Ordnung in Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

$$y' = (y_1', \dots, y_n') = F(x, y_1, \dots, y_n),, \quad F : G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad y(x_0) = \xi \in \mathbb{R}^n \tag{6}$$

um und untersuche, ob das jeweils resultierende Anfangswertproblem (lokal) eindeutig lösbar ist.

(i) $\omega'' = \omega$ für $x \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\omega(0) = a \in \mathbb{R}$ und $\omega'(0) = b \in \mathbb{R}$,

(ii) $g^{(4)} + g'g^{(3)} + 2g'' = g + \cos x$ für $x \in \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R}$ und $g^{(3)}(0) = g''(0) = g'(0) = g(0) = 0$.

Bestimme anschließend mit Hilfe der Picard-Iteration

$$\varphi_{k+1}(x) = \xi + \int_{x_0}^{x} F(t, \varphi_k(t)), \mathrm{d}t, \quad \varphi_0(x) := \xi, \quad \varphi(x) := \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)$$

eine Lösung φ des Systems aus (i).

Aufgabe 36: Betrachte die Differentialgleichung $y' = 2\sqrt{|y|}$ mit $y \in \mathbb{R}$.

(i) Gib 4 Lösungen des Anfangswertproblems $y(0) = 0$ an, die sich auf beliebig kleinen offenen Intervallen um $x = 0$ unterscheiden.

(ii) Gib ein Intervall an, auf dem sich das Anfangswertproblem $y(0) = 1$ eindeutig lösen lässt.

(iii) Gib auf $I = \mathbb{R}$ drei verschieden Lösungen des Anfangswertproblems $y(0) = 1$ an.

Stellt (i) einen Widerspruch zum Eindeutigkeitssatz (§12, Satz 2) dar?