Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Lösungen
30. Juni 2016

Analysis II
im Sommersemester 2016

Aufgabe 43: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \alpha + \beta x + \sum_{k=1}^{r-1} c_k |x - t_k|, \quad x \in [a, b]$$

für $r \in \mathbb{R}, r \geq 1$ und $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$, sowie $\alpha, \beta, c_1, \ldots, c_{r-1} \in \mathbb{R}$. Offenbar ist f als endliche Linearkombination stetig. Wir zeigen, dass jede f eine eine stückweise lineare Funktion ist. Es sei dazu $x \in [t_\ell, t_{\ell+1}]$ für ein $\ell \in \{0, \ldots, r-1\}$. Dann gilt

$$f(x) = \alpha + \beta x + \sum_{k=1}^{\ell} c_k(x - t_k) + \sum_{k=\ell+1}^{r-1} c_k(t_k - x). \tag{1}$$

Die Funktion f ist somit als endliche Linearkombination linearer Funktionen selbst linear auf dem Intervall $[t_\ell, t_{\ell+1}]$ und folglich stückweise linear auf dem Intervall $[a, b]$.
Es sei nun $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stückweise lineare Funktion mit

$$g(x) = \alpha_k + \beta_k x, \quad x \in [t_{k-1}, t_k], \quad k \in \{1, \ldots, r\}$$

mit $r \in \mathbb{R}, r \geq 1$ und $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$, sowie $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{R}$. Da eine lineare Funktion eindeutig durch zwei Funktionswerte bestimmt ist reicht es zu zeigen, dass es eine Funktion f wie in (1) gibt, sodass

$$f(t_k) = g(t_k) \quad \text{für alle } k \in \{0, \ldots, r\}$$

gilt. Aus dieser Bedingung ergibt sich das folgende lineare $(r+1) \times (r+1)$-Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t_0 & |t_0 - t_1| & |t_0 - t_2| & \cdots & |t_0 - t_{r-1}| \\ 1 & t_1 & 0 & |t_1 - t_2| & \cdots & |t_1 - t_{r-1}| \\ 1 & t_2 & |t_2 - t_1| & 0 & \cdots & |t_2 - t_{r-1}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{r-1} & |t_{r-1} - t_1| & |t_{r-1} - t_2| & \cdots & 0 \\ 1 & t_r & |t_r - t_1| & |t_r - t_2| & \cdots & |t_r - t_{r-1}| \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \beta_0 t_0 \\ \alpha_1 + \beta_1 t_1 \\ \vdots \\ \alpha_r + \beta_r t_r \end{pmatrix}$$

Wenn der Rang der Matrix $A \in \mathbb{R}^{(r+1)\times(r+1)}$ gleich $(r+1)$ ist, genau dann existiert eine Funktion f in (1) mit $f = g$. Betrachten wir dazu die Zeilen $v_0, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^{r+1}$ der Matrix A. Es sei $\sum_{k=0}^{r} \lambda v_k = 0$ mit $\lambda_0, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{r} \lambda_r = 0, \quad \sum_{k=0}^{r} t_k \lambda_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{r} \lambda_k |t_k - t_\ell| = 0 \quad \ell = 1, \ldots, r-1.$$

Daher gilt für $\ell \in \{1, \ldots, r-1\}$

$$\begin{aligned}
0 =& \sum_{k=0}^{\ell-1} \lambda_k (t_\ell - t_k) + \sum_{k=\ell+1}^{r} \lambda_k (t_k - t_\ell) = t_\ell \sum_{k=0}^{\ell-1} \lambda_k - \sum_{k=0}^{\ell-1} \lambda_k t_k + \sum_{k=\ell+1}^{r} \lambda_k t_k - t_\ell \sum_{k=\ell+1}^{r} \lambda_k \\
=& t_\ell \sum_{k=0}^{\ell-1} \lambda_k - \sum_{k=0}^{\ell-1} \lambda_k t_k - \sum_{k=0}^{\ell} \lambda_k t_k + t_\ell \sum_{k=0}^{\ell} \lambda_k = 2 t_\ell \sum_{k=0}^{\ell-1} \lambda_k - 2 \sum_{k=0}^{\ell-1} \lambda_k t_k \\
=& \sum_{k=0}^{\ell-1} \lambda_k (t_\ell - t_k).
\end{aligned}$$

Durch sukzessives Einsetzen von $\ell = 1$ bis $\ell = r-1$ erhalten wir $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{r-2} = 0$. Mit

$$0 = \sum_{k=0}^{r} \lambda_r = \lambda_{r-1} + \lambda r \text{und} \qquad 0 = \sum_{k=0}^{r} t_k \lambda_k = \lambda_{r-1} t_{r-1} + \lambda_r t_r = \lambda_r (t_r - t_{r-1})$$

verschwinden auch die letzten beiden Koeffizienten. Somit sind die Zeilen der Matrix linear unabhängig.

Aufgabe 46: Nach dem Weierstraß'schen Konvergenzkriterium konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

gleichmäßig auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Es sei $x \in (0, 2\pi)$. Nach Aufgabe 45 gilt dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = -\frac{\pi - x}{2}.$$

Daher gilt für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 + c =: F(x).$$

Da sowohl die Reihe als auch F im Intervall $[0, 2\pi]$ stetig sind, gilt diese Gleichheit sogar für alle $x \in [0, 2\pi]$. Integration von F liefert

$$0 = \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt)}{k^2} \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} F(t) \,\mathrm{d}t = \left[\frac{(x-\pi)^3}{12} + cx\right]_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c,$$

da für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kt) \,\mathrm{d}t = 0$$

gilt. Somit erhalten wir $c = -\frac{\pi^2}{12}$. Des Weiteren gilt für $x = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$