Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Übungsblatt 1
4. April 2016

Analysis II

im Sommersemester 2016

Ablauf: Die Übung findet in der Regel wöchentlich donnerstags um 7:00 Uhr im Curie-Hörsaal statt. Die Übungsblätter können unter

http://www.tu-ilmenau.de/analysis/team/philipp-schmitz/

heruntergeladen werden. Die Aufgaben ohne Stern des jeweiligen Übungsblattes sollen gelöst und zu Beginn der nächsten Übung abgeben werden. Eine Abgabe in Zweiergruppen ist erwünscht.

Schein: Zum Erhalt des Scheins „Analysis II" als eine Prüfungsvorleistung für die Prüfung „Analysis I/II" werden folgende Anforderungen gestellt:

(i) Es müssen mindestens 50 % der in der Übung erreichbaren Punkte erreicht werden.

(ii) Es müssen mindestens zwei Aufgabe in der Übung an der Tafel vorgerechnet werden. Jede weitere vorgerechnete Übungsaufgabe wird mit bis zu 2 Zusatzpunkten belohnt.

Abgabe: In der Übung am 14. April 2016
Die Aufgaben mit Stern werden in der Übung am 7. April 2016 besprochen.

Aufgabe 1*: Es sei für $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ ein Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $k \geq 1$ mit $p(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Beweise, dass

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \infty, & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

gilt. Zeige weiterhin, dass für einen ungeradzahligen Grad $k \geq 1$ das Polynom p eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 2*: In welchen Punkten sind die beiden nachfolgenden Funktionen stetig?

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x < \sqrt{2} \\ 1, & \text{falls } x > \sqrt{2} \end{cases}, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Aufgabe 3*: Untersuche die nachfolgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit!

(i) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$,

(ii) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^2}{1+x}$,

(iii) $h : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^3}{1+x}$.

Aufgabe 4*: Eine auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig* mit der Lipschitz-Konstante $L > 0$, wenn für alle $x, y \in D$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

gilt. Zeige, dass

(i) eine Lipschitz-stetige Funktion auch gleichmäßig stetig ist,

(ii) die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ nicht Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 5: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(x) = \frac{nx}{1 + |nx|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass

(i) die Funktion g_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig ist,

(ii) der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert,

(iii) die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ in jedem Punkt $x \neq 0$ stetig und in $x = 0$ unstetig ist.

Beachte, dass hiermit ein Beispiel für eine Folge stetiger Funktionen angegeben ist, die (punktweise) gegen eine unstetige Funktion konvergiert.

Aufgabe 6: Es sei $D \subset \mathbb{R}$ beschränkt und $f : D \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Zeige, dass die Menge $f(D)$ beschränkt ist.

Aufgabe 7: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, die Äquivalenz der beiden Aussagen:

(i) Die Funktion f ist injektiv und es gilt $f(a) < f(b)$.

(ii) Die Funktion f ist streng monoton wachsend.

Aufgabe 8: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ sowie $f(b) < g(b)$. Zeige, dass es einen Punkt $x \in [a, b]$ gibt, sodass $f(x) = g(x)$ gilt. Folgere aus dieser Aussage die Existenz einer Lösung $x \in [0, \infty)$ der Gleichung

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sqrt{x}.$$