Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 10
15. Juni 2016

Analysis II
im Sommersemester 2016

Abgabe: In der Übung am 23. Juni 2016

Aufgabe 41: Für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ seien

$$\binom{\alpha}{n} := \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - k + 1}{k} \quad \text{sowie} \quad \binom{\alpha}{0} := 1$$

die (verallgemeinerten) *Binomialkoeffizienten* α *über* n beziehungsweise α *über* 0.

(i) Beweise, dass für $|x| < 1$ die Identität

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k =: g(x) \tag{1}$$

gilt. Zeige dazu, dass $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und die Differentialgleichung

$$g'(x) = \frac{1}{2(1+x)} g(x), \quad |x| < 1$$

erfüllt. Schlussfolgere daraus, dass $x \mapsto g(x)(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ konstant ist.

(ii) Die Reihe g konvergiert sogar gleichmäßig auf $[-1, 1]$ (diese Aussage muss nicht gezeigt werden). Zeige, dass (1) auf ganz $[-1, 1]$ gilt.

(iii) Zeige, dass auf jedem abgeschlossenen Intervall $[-1, 1]$ die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (x^2 - 1)^n$$

gleichmäßig gegen $\mathrm{abs} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ konvergiert.

Definition: Eine stetige Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise linear*, wenn es eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$ des Intervalls $[a, b]$ und Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für jedes $k \in \{1, \ldots, r\}$ und alle $x \in [t_{k-1}, t_k]$

$$\varphi(x) = \alpha_k + \beta_k x$$

gilt. Wir bezeichnen den Vektorraum aller stückweise linearen Funktionen $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{PL}[a, b]$.

Aufgabe 42: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varphi \in \mathrm{PL}[a, b]$ mit $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$ gibt.
(Der Vektorraum der stückweise linearen Funktionen $\mathrm{PL}[a, b]$ *liegt dicht bezüglich der Supremumsnorm im Vektorraum der stetigen Funktionen auf* $[a, b]$*.)*

Aufgabe 43: Zeige, dass jede Funktion $\varphi \in \mathrm{PL}[a,b]$ sich darstellen lässt als

$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + \sum_{k=1}^{r-1} c_k |x - t_k|$$

mit geeigneten Konstanten $\alpha, \beta, c_1, \ldots, c_{r-1} \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 44 (Weierstraß'scher Aproximationssatz)**:** Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetige, komplexwertige Funktion. Zeige, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom $p : [a,b] \to \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$\|f - p\|_\infty < \varepsilon$$

gilt. Verwende dazu die Aufgaben 42, 43 und 41 (iii).
(Der Vektorraum der komplexwertigen Polynome auf $[a,b]$ *liegt dicht bezüglich der Supremumsnorm im Vektorraum der stetigen, komplexwertigen Funktionen auf* $[a,b]$*.)*