Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 11
22. Juni 2016

# Analysis II

**im Sommersemester 2016**

**Abgabe**: In der Übung am 30. Juni 2016

**Aufgabe 45:** Zeige, dass für $x \in [0, 2\pi]$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{\pi - x}{2}, & x \in (0, 2\pi] \end{cases}$$

gilt und die Reihe für jedes $\delta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \delta < 2\pi$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ gleichmäßig konvergiert. Prüfe dazu für die Partialsummen die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{x} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} - 1 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{x} \frac{e^{-\mathrm{i}nt} - e^{\mathrm{i}(n+1)t}}{1 - e^{\mathrm{i}t}} - 1 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{x} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} t\right)} - 1 \,\mathrm{d}t$$

auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ und schätze das letzte Integral mit Hilfe partieller Integration geeignet ab.

**Aufgabe 46:** Zeige, dass für alle $x \in [0, 2\pi]$ die Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \left(\frac{x - \pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$$

gilt. Berechne anschließend den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$.
*Hinweis: Bestimme* $\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \,\mathrm{d}x$.

**Aufgabe 47:** Berechne die Fourierreihe der folgenden $2\pi$-periodischen Funktionen:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ für $x \in [0, 2\pi]$,

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi]$,

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x-\pi)^2}{4}$ für $x \in [0, 2\pi]$.

**Aufgabe 48:**

(i) Zeige, dass die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *konvexe* Funktion ist, das heißt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$\exp(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(y).$$

*Hinweis: Wende den Mittelwertsatz der Differentialrechung für die Punkte* $x, y$ *und* $z = \lambda x + (1 - \lambda) y$ *an.*

(ii) Beweise die *Young'sche Ungleichung*: Für alle $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und alle $a, b \in [0, \infty)$ gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$