Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 12
28. Juni 2016

Analysis II

im Sommersemester 2016

Abgabe: In der Übung am 7. Juli 2016

Aufgabe 48 (Hölder-Ungleichung)**:** Es bezeichne $\mathcal{C}[a,b]$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum der stetigen Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{C}$. Für $p\in[1,\infty)$ und $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ seien

$$\|\cdot\|_p:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R},\quad x=(x_1,\dots,x_n)\mapsto\|x\|_p:=\left(\sum_{k=1}^n|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|\cdot\|_p:\mathcal{C}[a,b]\to\mathbb{R},\quad f\mapsto\|f\|_p:=\left(\int_a^b|f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Wir betrachten reelle Zahlen $p,q\in(1,\infty)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Zeige, dass

(i) für alle $x,y\in\mathbb{C}^n$ gilt : $\sum_{k=1}^n|x_ky_k|\le\|x\|_p\|y\|_q$,

(ii) für alle $f,g\in\mathcal{C}[a,b]$ gilt: $\|fg\|_1\le\|f\|_p\|g\|_q$.

Hinweise: Verwende die Young'sche Ungleichung.

Aufgabe 49 (Minkowski-Ungleichung, p-Normen)**:** Es sei $p\ge1$. Zeige:

(i) für alle $x,y\in\mathbb{C}^n$ gilt: $\|x+y\|_p\le\|x\|_p+\|y\|_p$,

(ii) für alle $f,g\in\mathcal{C}[a,b]$ gilt: $\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$,

(iii) $\|\cdot\|_p$ ist eine Norm auf $\mathbb{C}^n$,

(iv) $\|\cdot\|_p$ ist eine Norm auf $\mathcal{C}[a,b]$.

Aufgabe 50: Beweise die nachfolgenden Aussagen:

(i) Der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{C}[0,1]$ zusammen mit der Norm $\|\cdot\|_2$ ist kein Banachraum.

(ii) Der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{C}[0,1]$ ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ ist ein Banachraum.

Aufgabe 51: Es bezeichne $\mathcal{C}^1[a,b]$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum stetig differenzierbaren Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{C}$. Wir definieren auf $\mathcal{C}^1[a,b]$ die Abbildung

$$\|\cdot\|:\mathcal{C}[a,b]\to\mathbb{R},\quad f\mapsto\|f\|:=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty.$$

(i) Zeige, dass der Raum $\mathcal{C}^1[a,b]$ ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ kein Banachraum ist.

(ii) Beweise, dass der Raum $\mathcal{C}^1[a,b]$ zusammen mit der Abbildung $\|\cdot\|$ ein Banachraum ist.

Wiederholung: Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ heißt *Norm*, wenn

(i) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0_X$,

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für alle $x \in X$ und jedes $\lambda \in \mathbb{K}$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in X$

gelten. Zusammen mit der Norm $\|\cdot\|$ ist X ein *normierter* Vektorraum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im normierten Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *Cauchyfolge*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $m, n \geq N$

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

gilt. Ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *Banachraum* (*vollständig* normierter Vektorraum), wenn jede Cauchyfolge in X bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ in X konvergiert.