Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 13
7. Juli 2016

Analysis II

im Sommersemester 2016

Besprechung (ohne Abgabe): In der Übung am 14. Juli 2016

Aufgabe 53: Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Zeige:

(i)
$$\mathring{M} = \bigcup_{\substack{U \subseteq M, \\ U \text{ offen}}} U,$$

(ii)
$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{V \supseteq M, \\ V \text{ abgeschlossen}}} V.$$

Aufgabe 54: Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $U \subseteq X$. Beweise die Äquivalenz der nachfolgenden Aussagen:

(i) U ist beschränkt,

(ii) die Menge $\{d(x, y) : x, y \in U\}$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$,

(iii) es existieren $x \in U$ und $\rho > 0$, sodass $U \subseteq B_\rho(x)$,

(iv) für jedes $x \in U$ existiert ein $\rho > 0$, sodass $U \subseteq B_\rho(x)$,

(v) es existieren ein $x \in X$ und ein $\rho > 0$, sodass $U \subseteq B_\rho(x)$.

Aufgabe 55: Es seien (X, d) und (Z, s) metrische Räume. Eine Funktion $f : X \to Z$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$
$$s\Big(f(x), f(y)\Big) < \varepsilon$$
gilt.
Es sei $f : X \to Z$ gleichmäßig stetig. Zeige, dass für jede Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X die Folge $\Big(f(x_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Z darstellt. Zeige weiterhin, dass diese Aussage für eine stetige Funktion f im Allgemeinen nicht mehr gilt.

Definition: Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zwei Normen $\|\cdot\|_1 : X \to \mathbb{R}$ und $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ heißen *äquivalent*, wenn es positive Konstanten $m, n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass
$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$
für alle $x \in X$ gilt.

Aufgabe 56

(i) Wir betrachten die $\mathbb{K}$-Vektorräume X und Y mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Es seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf X sowie $\|\cdot\|_3$ und $\|\cdot\|_4$ äquivalente Normen auf Y. Weiterhin sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeige, dass $f : (X, \|\cdot\|_1) \to (Y, \|\cdot\|_3)$ genau dann stetig ist, wenn $f : (X, \|\cdot\|_2) \to (Y, \|\cdot\|_4)$ stetig ist.

(ii) Es sei die Abbildung $D : \mathcal{C}^1[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$, $f \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gegeben. Untersuche die Abbildung D für $(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|)$ und $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ beziehungsweise $(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ und $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ auf Stetigkeit. Hierbei bezeichne $\|\cdot\|$ die Norm

$$\|\cdot\| : \mathcal{C}^1[a,b] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$