Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 2
11. April 2016

Analysis II
im Sommersemester 2016

Abgabe: In der Übung am 21. April 2016

Aufgabe 9: Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $a^x := \exp(x \log(a))$. Beweise für $a > 0, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ die nachfolgenden Potenzgesetze:

(i) $a^x a^y = a^{x+y}$, (ii) $(a^x)^y = a^{xy}$, (iii) $a^x b^x = (ab)^x$, (iv) $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$.

Aufgabe 10: Zeige die nachfolgenden Aussagen. Die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x \log(a))$ ist für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend. Weiterhin wird in beiden Fällen $\mathbb{R}$ bijektiv auf $(0, \infty)$ abgebildet. Die Umkehrfunktion $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig und es gilt

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}.$$

Aufgabe 11:

(i) Zeige, dass $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$ gilt.

Hinweis: Benutze die Restgliedabschätzung der Exponentialreihe.

(ii) Bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\log(x+1)}{x}$.

(iii) Bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ für $a > 0$.

Aufgabe 12:

(i) Es seien die komplexen Zahlen $z = \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ und $w = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ gegeben. Berechne $z + w$, $z \cdot w$, $\frac{1}{z}$ sowie $\frac{z}{w}$ und stelle die Ergebnisse in der Form $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar.

(ii) Berechne $(1 + \mathrm{i})^4$.

(iii) Zerlege $z^4 - 1$ in Linearfaktoren.

(iv) Bestimme alle Lösungen von $z^5 = 1$

(v) Die Punktmenge

$$K := \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 2 \right\}$$

stellt einen Kreis in der Gaußschen Zahlenebene dar. Bestimme Mittelpunkt und Radius dieses Kreises.

Zur Erinnerung: Ein Kreis in der Ebene mit Mittelpunkt (m_1, m_2) *und Radius* r *ist durch die Kreisgleichung* $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$ *gegeben.*