Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 3
18. April 2016

Analysis II
im Sommersemester 2016

Abgabe: In der Übung am 28. April 2016

Aufgabe 13: Beweise das Majorantenkriterium für komplexe Reihen. *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine konvergente Reihe nicht-negativer reeller Zahlen* a_n, $n \in \mathbb{N}$. *Weiter sei* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge komplexer Zahlen mit* $|c_n| \leq a_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *absolut und im gewöhnlichen Sinne.*

Aufgabe 14: Prüfe die folgenden Funktionen auf Stetigkeit.

(i) $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

(ii) $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

(iii) $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

(iv) $f : \mathbb{C} \setminus \{+\mathrm{i}, -\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1+z+3z^2}{z^2+1}$,

(v) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$.

Aufgabe 15: Gegeben seien die Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $\cos(z) := \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}\right)$ und $\sin(z) := \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}\right)$ für $z \in \mathbb{C}$. Bestimme $\mathrm{Re}(\cos(z))$, $\mathrm{Im}(\cos(z))$ $\mathrm{Re}(\sin(z))$ und $\mathrm{Im}(\sin(z))$ für $z \in \mathbb{C}$. Zeige weiterhin, dass cos und sin unbeschränkte Funktionen sind, das heißt die Bildmengen $\cos(\mathbb{C})$ und $\sin(\mathbb{C})$ sind unbeschränkt.

Aufgabe 16: Es sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$g(z) = \sqrt{\frac{|z| + \mathrm{Re}(z)}{2}} + \mathrm{i}\sigma(z)\sqrt{\frac{|z| - \mathrm{Re}(z)}{2}} \quad \text{mit} \quad \sigma(z) = \begin{cases} +1, & \text{falls } \mathrm{Im}(z) \geq 0, \\ -1, & \text{falls } \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Zeige, dass $(g(z))^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Untersuche die Funktion g außerdem auf Stetigkeit in $\mathbb{C}$.
Hinweis: Untersuche die Stetikeit von g *auf den Mengen* $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0\}$, $[0, \infty)$ *und* $(-\infty, 0)$.