Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 5
12. Mai 2016

# Analysis II

**im Sommersemester 2016**

**Abgabe**: In der Übung am 19. Mai 2016

**Aufgabe 21:** Die Funktionen *Sinus Hyperbolicus* und *Kosinus Hyperbolicus* sind gegeben durch $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ beziehungsweise $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Zeige, dass sinh die reelle Achse bijektiv auf sich selbst und cosh die nichtnegative Halbachse $[0, \infty)$ bijektiv auf das Intervall $[1, \infty)$ abbilden. Die jeweiligen Umkehrfunktionen nennt man *Areasinus Hyperbolicus* beziehungsweise *Areakosinus Hyperbolicus* und bezeichnet sie mittels

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \operatorname{arcosh} : [1, \infty) \to [0, \infty).$$

Bestimme jeweils die erste Ableitung von arsinh und arcosh.

**Aufgabe 22:**

(i) Berechne die Grenzwerte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}, \quad \lim_{x \to \infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

(ii) Es seien $f(x) := x + \sin(x)\cos(x)$ und $g(x) := f(x)e^{\sin(x)}$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ jedoch nicht. Warum ist dies keine Widerspruch zur Regel von l'Hospital?

**Aufgabe 23:**

(i) Untersuche die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n e^{-x}$ für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, auf lokale Extrema in Abhängigkeit von $n$. Sind die gefundenen Extrema streng?

(ii) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Der Graph $\Gamma_f$ von $f$ ist durch

$$\Gamma_f := \Big\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in \mathbb{R}\Big\}$$

definiert. Bestimme den Punkt $p \in \Gamma_f$, der dem Punkt $q = (3, 15/4) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich des euklidischen Abstandes am nächsten liegt.

**Aufgabe 24:**

(i) Beweise den *erweiterten Mittelwertsatz*. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die in $(a, b)$ differenzierbar sind. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, sodass

$$\Big(f(b) - f(a)\Big)g'(\xi) = \Big(g(b) - g(a)\Big)f'(\xi)$$

gilt.

(ii) Es seien $a, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $f : (0, a) \to \mathbb{R}$ eine in $(0, a)$ differenzierbare Funktion mit $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$ und $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = c$. Zeige ohne die Regel von l'Hospital, dass dann

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{x} = c$$

gilt.