Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 6
18. Mai 2016

Analysis II

im Sommersemester 2016

Abgabe: In der Übung am 26. Mai 2016

Aufgabe 25: Untersuche die Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \frac{1}{x} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} > 0 \text{ mit } p,q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

auf Riemann-Integrierbarkeit und berechne gegebenenfalls das Integral.

Aufgabe 26: Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen. Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 27: Beweise oder widerlege die nachfolgende Aussage. Es seien $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ zwei nichtleere beschränkte Intervall und $f : I_1 \to \mathbb{R}$, $g : I_2 \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen mit $g(I_2) \subset I_1$. Dann ist auch $f \circ g : I_2 \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion.

Aufgabe 28: Berechne die Integrale

$$\int_2^3 \frac{1-x^2}{x^3+x^2+x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_2^3 \frac{3-x}{x^3-x}\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Verwende eine Partialbruchzerlegung und die Substitutionsregel.

Satz (Substitutionsregel)**:** *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\phi([a,b]) \subset I$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$