Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 8
1. Juni 2016

Analysis II

im Sommersemester 2016

Abgabe: In der Übung am 9. Juni 2016

Aufgabe 33: Es sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben mit $f_n(x) := nxe^{-nx^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert und bestimme den punktweisen Grenzwert. Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die so erklärte Funktion f auf einem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, welches den Nullpunkt enthält? Was gilt für Intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $0 \notin [a,b]$?

Definition: Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ eine Potenzreihe mit $a, c_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt

$$R := \sup\left\{ |z-a| \;:\; z \in \mathbb{C},\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \text{ konvergiert} \right\}$$

Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$. Es gilt $R \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$.

Aufgabe 34: Es sei für $a, c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $0 < r < R$ eine Funktion $f : K(a,r) \to \mathbb{C}$ durch die Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, \quad z \in K(a,r)$$

gegeben, wobei $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe sei und $K(a,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}$. Weiterhin existiere eine konvergente Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $K(a,r) \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = a$ und $f(y_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann f identisch der Nullfunktion ist.
Hinweis: Zeige, dass alle Koeffizienten c_n, $n \in \mathbb{N}$ verschwinden. Betrachte dazu $f(z)/(z-a)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 35: Betrachte für $a \in \mathbb{C}$ und $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

mit dem Konvergenzradius $R \geq 0$. Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ ein Index mit $c_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und es existiere der Grenzwert

$$r := \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

wobei $r = \infty$ zugelassen ist. Zeige, dass dann r gleich dem Konvergenzradius R der Potenzreihe ist.

Aufgabe 36: Bestimme die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, sodass die jeweilige Potenzreihe konvergiert:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}, \quad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!}, \quad \text{(iii)} \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n, \quad \text{(iv)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}, \quad \text{(v)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{n(n+1)}.$$