Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 9
8. Juni 2016

Analysis II

im Sommersemester 2016

Ankündigung: Die Vorlesung am Freitag, den 8. Juli, findet im Faraday-Hörsaal statt.

Abgabe: In der Übung am 16. Juni 2016

Aufgabe 37: Gegeben seien Funktionen $f_n, g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ für $a < b$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige folgende Aussagen:

(i) Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf $[a,b]$ konvergieren, so konvergiert $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls punktweise auf $[a,b]$.

(ii) Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergieren und die Folge $(\|g_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ wie auch die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ beschränkt sind, so konvergiert $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gleichmäßig auf $[a,b]$.

(iii) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Weiterhin sei $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem nichtleeren, abgeschlossenen Intervall $[\alpha,\beta]$,

$$\mathbb{R} \supset [\alpha,\beta] \supset f([a,b]) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n([a,b]).$$

Dann konvergiert die Folge $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen $\varphi \circ f$.

Aufgabe 38: Bestimme für die folgenden Potenzreihen jeweils das größte offene Intervall $I \subset \mathbb{R}$, sodass diese auf I konvergieren und berechne die Summe der Reihe für alle $x \in I$:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1} n^3 x^n, \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Aufgabe 39: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass f beliebig oft differenzierbar ist und berechne die Taylor-Reihe von f im Entwicklungspunkt $a = 0$. Für welche Punkte $x \in \mathbb{R}$ stimmt die Taylor-Reihe mit f überein?

Aufgabe 40: Gegeben sei die Funktion $f : (-\infty, 2) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log\left(1 - \frac{x}{2}\right)$. Bestimme die Taylor-Reihe $T(f,0)$ der Funktion f im Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie ihren Konvergenzradius. Für welche $x \in \mathbb{R}$ stimmt die Taylor-Reihe mit f überein?