Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 10
28. Dezember 2015

Analysis I
im Wintersemester 2015/2016

Änderung: Die Übung am Montag, den 11. Januar 2016, wird mit der Vorlesung am Freitag, den 15. Januar 2016, getauscht. Die Vorlesung am 11. Januar beginnt um 17:15 Uhr.

Abgabe: In der Vorlesung am 11. Januar 2016

Aufgabe 33: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$. Weiterhin betrachte wir rekursive Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 := a$ und $b_0 := b$ und

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \quad \text{und} \quad b_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass beide Folgen konvergieren und ihre Grenzwerte übereinstimmen. Dieser gemeinsame Grenzwert

$$M(a,b) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

wird *aritmetisch-geometrisches Mittel* genannt. Zeige außerdem, dass für $a > 0$ und $b \geq 0$ die Beziehung

$$M(a,b) = aM(1, b/a)$$

gilt.

Aufgabe 34: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Zeige dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k(a_k - a_{k+1})$ konvergiert. Was gilt für die Grenzwerte der beiden Reihen im Falle der Konvergenz?

Aufgabe 35: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $M > 0$ eine Schranke mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige

(i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert die Reihe

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

(ii) Ist $a_1 \neq 0$, so gilt $f(x) \neq a_0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x| < \frac{|a_1|}{2M}$.

Aufgabe 36: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$b_0 := \frac{1}{2}a_0, \quad b_k := \frac{1}{2}a_{2k-2} + a_{2k-1} + \frac{1}{2}a_{2k} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}, k \geq 1.$$

Zeige, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert und im Falle der Konvergenz

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

gilt.