Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 11
14. Januar 2016

# Analysis I
## im Wintersemester 2015/2016

**Abgabe**: In der Übung am 18. Januar 2016

**Aufgabe 37** (Kriterium von Kummer): Beweise das folgende Konvergenzkriterium für Reihen. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver ($a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$), reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver, reeller Zahlen und ein $\theta > 0$ existieren, sodass ab einem Index $n_0 \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$

$$b_{n-1}\frac{a_{n-1}}{a_n} - b_n \geq \theta > 0$$

gilt.

**Definition**: Eine bijektive Abbildung $\tau : M \to M$ für eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ heißt *Umordnung (Permutation)*.
Man spricht von einer *beschränkten* Umordnung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wenn ein $d \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|\tau(n) - n| \leq d \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt.

**Aufgabe 38**: Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. In der Vorlesung wurde mit Hilfe des Leibnizkriteriums die Konvergenz dieser Reihe gegen einen Wert $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$, gezeigt. Betrachte weiterhin die Umordnung $\tau : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, gegeben durch $\tau(1) = 1$, $\tau(2) = 2$ und für $n > 2$

$$\tau(n) = \begin{cases} n + \frac{n}{3}, & \text{falls } n \text{ durch 3 teilbar ist} \\ n - \frac{n-1}{3}, & \text{falls } n-1 \text{ durch 3 teilbar ist} \\ n + \frac{n-2}{3}, & \text{falls } n-2 \text{ durch 3 teilbar ist.} \end{cases}$$

Zeige, dass für die permutierte Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = \frac{A}{2}$$

gilt.

**Aufgabe 39**: Es sie $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beschränkte Umordnung und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeige dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn die permutierte Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ konvergiert. Stimmen im Falle der Konvergenz die Grenzwerte überein?

**Aufgabe 40**: Prüfe die nachfolgenden Reihen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$\text{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}, \quad \text{(ii)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5 \cdot 3^n}, \quad \text{(iii)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$