Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 12
18. Januar 2016

Analysis I

im Wintersemester 2015/2016

Abgabe: In der Übung am 25. Januar 2016

Aufgabe 37: Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe. Zeige, dass dann für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, sodass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)}$ gegen x konvergiert.
Hinweis: Betrachte die Teilfolgen der positiven und negativen Folgeglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 38: Es seien $a, b > 1$ mit $a - b = 1$. Bestimme das Cauchy-Produkt der Reihen

$$a + \sum_{k=1}^{\infty} a^k \quad \text{und} \quad -b + \sum_{k=1}^{\infty} b^k$$

und zeige, dass dieses absolut konvergiert.

Aufgabe 39: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, jedoch nicht absolut konvergent ist. Zeige weiterhin, dass das Cauchy-Produkt der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst divergiert.

Aufgabe 40: Beweise die Gültigkeit der folgenden Beziehungen für die Exponentialfunktion:

(i) Für $x > 0$ gilt $\exp(x) > 1 + x$.

(ii) Für $x < 0$ gilt $\exp(x) < \frac{1}{1-x}$.

(iii) Für $x < y$ gilt $\exp(x) < \exp(y)$.

(iv) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{1}{2}\Big(\exp(x) + \exp(-x)\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.