Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT **ILMENAU**

Übungsblatt 13
26. Januar 2016

Analysis I

im Wintersemester 2015/2016

Änderung: Nächsten Montag, den 1. Februar 2016, findet ab 17:15 Uhr eine Vorlesung statt.

Abgabe: In Vorlesung am **2.** Februar 2016

Aufgabe 49: Zeige, das die Menge aller endlichen Teilmengen der natürlichen Zahlen abzählbar ist.

Definition: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Grenzwerte

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \Big(\sup\{\, a_k \,|\, k \geq n \,\}\Big)$$

sowie

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \Big(\inf\{\, a_k \,|\, k \geq n \,\}\Big)$$

werden *Limes superior* und *Limes inferior* genannt.

Bemerkung (darf benutzt werden): Die Folge $\sup\{\, a_k \,|\, k \geq n \,\}$ ist monoton fallend (oder identisch $+\infty$) und die Folge $\inf\{\, a_k \,|\, k \geq n \,\}$ ist monoton wachsend (oder identisch $-\infty$). Daher existieren beide Grenzwerte immer eigentlich oder uneigentlich, das heißt sie sind reelle Zahlen oder es gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ beziehungsweise $\liminf_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$.

Aufgabe 50: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = a$$

genau dann gilt, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die beide Aussagen (i) und (ii) gelten.

(i) Es existiert eine $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

(ii) Für alle $M \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \geq M$, sodass $a_m > a - \varepsilon$ gilt.

Aufgabe 51: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und H die Menge ihrer Häufungspunkte. Beweise, dass die Beziehungen

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup H \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \inf H$$

gelten. Zeige außerdem dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a$$

gilt.

Aufgabe 52: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge gegeben durch $a_n := 2^n(1 + (-1)^n) + 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechne

$$\limsup_{n\to\infty} a_n,\ \liminf_{n\to\infty} a_n,\ \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \text{ sowie } \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$