Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 3
2. November 2015

Analysis I

im Wintersemester 2015/2016

Abgabe: Bis zur Übung am 9. November 2015

Aufgabe 9: Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ sowie $x_i, y_j \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$. Beweise das allgemeine Distributivgesetz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j. \tag{R}$$

Aufgabe 10: Die Struktur der komplexen Zahlen ist definiert durch die Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ und die beiden Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \oplus &: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \big((a,b),(c,d)\big) \mapsto (a+c, b+d) \quad \text{und} \\ \odot &: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \big((a,b),(c,d)\big) \mapsto (a\cdot c - b\cdot d, a\cdot d + b\cdot c), \end{aligned}$$

wobei $+$ beziehungsweise $-$ und $\cdot$ die bekannten Verknüpfungen auf den reellen Zahlen sind. Zeige mit Hilfe der Rechenregeln der reellen Zahlen, dass $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ ein Körper ist, das heißt es gelten die Körperaxiome **(A.1)** bis **(A.4)** und **(M.1)** bis **(M.4)** sowie **D**.

Aufgabe 11: Beweise fünf der nachstehenden Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen **(O.1)**, **(O.2)** und **(O.3)**. Jeweils vorhergehende Aussagen, die des letzten Übungsblattes sowie die Körperaxiome dürfen verwendet werden.

(S) Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: Sind $x < y$ und $y < z$, so ist $x < z$.

(T) Für $a, x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Ist $x < y$, so folgt $a + x < a + y$.

(U) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Ist $x < y$, so ist $-x > -y$.

(V) Für $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Sind $x < y$ und $a < b$, dann ist $x + a < y + b$.

(W) Für $a, x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Sind $x < y$ und $a > 0$, dann folgt $ax < ay$.

(X) Für $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b$ folgt $ax < by$.

(Y) Für $a, x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Sind $x < y$ und $a < 0$, dann ist $ax > ay$.

(Z) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $x^2 > 0$.

(α) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $x > 0$ genau dann, wenn $x^{-1} > 0$.

(β) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $0 < x < y$ folgt $x^{-1} > y^{-1}$.

Aufgabe 12: Beweise die nachfolgenden Aussagen mit Hilfe des Archimedischen Axioms.

(i) Es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$. Gilt für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $0 \leq x \leq \varepsilon$, so folgt $x = 0$.

(ii) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann existiert ein $q \in \mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$, sodass

$$x < q < y$$

gilt. Diese Eigenschaft wird als *Dichtheit der rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ *in den reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ bezeichnet.
Hinweis: Finde eine natürliche Zahl n *mit* $1 + nx < ny$ *und betrachte* $\lfloor nx + 1 \rfloor$.