Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 4
6. November 2015

Analysis I
im Wintersemester 2015/2016

Abgabe: Bis zur Übung am 16. November 2015

Aufgabe 13: Betrachte den in Aufgabe 10 definierten Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

(i) Zeige, dass $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper ist.

(ii) Der Betrag auf $\mathbb{C}$ wird über die Abbildung

$$|\cdot|: \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

definiert, wobei $\sqrt{\cdot}$ die übliche Quadratwurzel für nichtnegative reelle Zahlen ist. Zeige, dass für beliebige $z = (x, y), w = (u, v) \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

(b) $|z \odot w| = |z| \cdot |w|$.

(c) $|z \oplus w| \leq |z| + |w|$.

Definition: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt *konvergent gegen* $a \in \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N$$

gilt. Die Zahl a wird dabei als *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Aufgabe 14: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n := \frac{1}{n^2-8}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeige anhand der Definition von Konvergenz, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 15: Zeige, dass für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

gilt. Bestimme nun das Konvergenzverhalten der beiden Folgen

$$\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \qquad \text{und} \qquad \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$$

und gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 16: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge sowie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $b_n := a_{n+k}$ und $c_n := a_{n\cdot k}$ für ein festes $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(i) Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge ist.

(ii) Welcher Zusammenhang bezüglich der Konvergenz besteht zwischen den Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$?