Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 5
16. November 2015

Analysis I
im Wintersemester 2015/2016

Abgabe: Bis zur Übung am 23. November 2015

Bemerkung: Der Nachweis, dass eine Folge konvergiert, soll stets mit Hilfe der Definition von Konvergenz erbracht werden.

Aufgabe 17: (i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein konvergente Folge reeller Zahlen. Zeige, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$b_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k$$

konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

(ii) Negiere die Definition der Konvergenz einer Folge und zeige das die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ nicht gegen a konvergiert.

Aufgabe 18: Es seien $b > 0$ eine reelle Zahl und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine rekursiv definierte Folge reeller Zahlen mit $0 < a_0 < \frac{1}{b}$ und $a_{n+1} := 2a_n - ba_n^2$. Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{b}$ konvergiert.

Aufgabe 19: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Wir definieren zwei weitere Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \max\{a_n, b_n\}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n := \min\{a_n, b_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Gilt auch die Umkehrung? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 20: Zeige die nachfolgenden Konvergenzen:

(i) Für jedes $a > 0$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}$, gegen 1.
Hinweis: Unterscheide die Fälle $a \geq 1$ und $a < 1$. Forme außerdem den Term $(\sqrt[n]{a})^n$ so um, dass die Bernoullische Ungleichung darauf angewendet werden kann.

(ii) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert gegen 1.
Hinweis: Wende auf den Term $(\sqrt[n]{n})^n$ den Binomischen Lehrsatz an.