Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 6
26. November 2015

Analysis I

im Wintersemester 2015/2016

Änderungen: Die Vorlesungen am Dienstag, den 24. November 2015, und Freitag, den 27. November fallen aus. Am Montag, den 30. November 2015, findet statt der Übung eine Vorlesung beginnend um 17:10 Uhr statt. Der Übungstermin wird am Freitag, den 4. Dezember 2015, zur regulären Vorlesungszeit nachgeholt.

Abgabe: In der Vorlesung am 30. November 2015

Aufgabe 17: Für zwei positive Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_0 := b$ und $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(i) Betrachte die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n := x_n - \sqrt{a}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeige, die Gültigkeit der Beziehung

$$d_{n+1} = \frac{d_n^2}{2x_n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Folgere daraus, dass zum einen $d_n \geq 0$ und zum anderen $d_{n+1} \leq \frac{1}{2}d_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Bestimme nun den Grenzwerte der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 18: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen.

(i) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren genau dann, wenn die Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

(ii) Wenn die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergieren, so divergieren die Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 19: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass dann auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.
Gilt die Behauptung noch, wenn nur noch $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \geq N$ für eine feste natürliche Zahl N vorausgesetzt wird? Begründe deine Antwort.
Bestimme nun mit Hilfe der obigen Behauptung den Grenzwert der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \frac{1}{2n} - n + \sqrt{n^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 20: Wir betrachten den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ aus Aufgabe 9 mit der Betragsnorm $|\cdot| : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Eine Folge komplexer Zahlen $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $(x, y) \in \mathbb{C}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N existiert, sodass für alle $n \geq N$

$$\Big|(x_n, y_n) \oplus (-x, -y)\Big| < \varepsilon$$

gilt.
Zeige, dass eine Folge komplexer Zahlen $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $(x, y) \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x und die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert.
Prüfe anschließend die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls deren Grenzwerte

(i) $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(\big(\tfrac{1}{n\sqrt{2}}, \tfrac{1}{n\sqrt{2}}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$,

(ii) $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big((0, 1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$,

(iii) $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big((n, \tfrac{1}{n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hinweis: Für $(x, y) \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $(x, y)^n$ die n-fache Multiplikation der Zahl (x, y) mit sich selbst, das heißt

$$(x, y)^n := \underbrace{(x, y) \odot \cdots \odot (x, y)}_{n \text{ Faktoren}}$$