Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 7
30. November 2015

Analysis I

im Wintersemester 2015/2016

Abgabe: In der Übung am 7. Dezember 2015

Definition: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$, so heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *Teilfolge* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 21: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und a eine reelle Zahl. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.

(ii) Jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält eine gegen a konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_m}})_{m\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 22: Bestimme den Grenzwert der Folgen

(i) $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1}$ für $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $(p_n)_{n\geq 2}$ mit $p_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \dfrac{k^3-1}{k^3+1}$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Hinweis: Verwende bei (i) eine Partialbruchzerlegung. Finde dazu Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $\frac{a}{2k-1} + \frac{b}{2k+1} = \frac{1}{4k^2-1}$ gilt.

Aufgabe 23 (Wurzelkriterium): Es sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gebe ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q$$

gilt.

(i) Zeige, dass die Reihe konvergiert.

(ii) Zeige außerdem, dass die Bedingung

$$\sqrt[n]{a_n} < 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist.

Aufgabe 24: Prüfe die nachstehenden Reihen auf Konvergenz,

$$\text{(i)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \quad \text{(ii)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-2)^3 n!}{2^n n^n}, \quad \text{(iii)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n.$$