Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 8
7. Dezember 2015

Analysis I

im Wintersemester 2015/2016

Abgabe: In der Übung am 14. Dezember 2015

Definition: Eine Folge komplexer Zahlen $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|(x_m, y_m) \oplus (-x_n, -y_n)| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m \geq n \geq N$$

gilt.

Aufgabe 25: Zeige, dass der Körper $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ das Vollständigkeitsaxiom erfüllt, das heißt, dass jede (komplexe) Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert. Zeige außerdem, dass jede konvergente Folge komplexer Zahlen eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 26: Zeige, dass die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0 := 1$ und $x_{n+1} := \frac{2+x_n}{1+x_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge ist.
Hinweis: Schätze $|x_m - x_n|$ mit Hilfe der geometrischen Summenformel ab.

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Kontraktion*, wenn es eine Konstante L mit $0 \leq L < 1$ gibt, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

gilt.

Aufgabe 27 (Banachscher Fixpunktsatz): Zeige, dass eine Kontraktion f genau einen Fixpunkt in $\mathbb{R}$ besitzt, das heißt es existiert genau ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$. Gehe folgendermaßen vor.

(i) Zeige zuerst die Eindeutigkeit des Fixpunktes falls dieser existiert.

(ii) Betrachte nun die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $x_{n+1} := f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Weise nach, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

Hinweis: Verwende eine ähnliche Abschätzung wie in Aufgabe 26.

(iii) Folgere daraus, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert x ein Fixpunkt von f ist.

Aufgabe 28: Prüfe die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0 := 0$, $x_1 := 1$ und $x_{n+1} := \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$ auf Konvergenz. Zeige zuerst, dass

$$x_{n+1} - x_n = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt und dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Berechne danach mit Hilfe der geometrischen Reihe den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.