Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 9
14. Dezember 2015

Analysis I

im Wintersemester 2015/2016

Abgabe: In der Übung am 4. Januar 2016

Aufgabe 29: Es sei $a = a_{-k} \dots a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ ein Dezimalbruch, das heißt $k \in \mathbb{N}$ und $a_n \in \{0, \dots 9\}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq -k$. Zeige die Äquivalenz der beiden Aussagen.

(i) Der Dezimalbruch a ist periodisch, das heißt es existieren $r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass

$$a_{n+s} = a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq r$$

gilt

(ii) Die Zahl a ist rational.

Definition: Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* einer reellen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert.

Aufgabe 30: Zeige, dass eine Folge reeller Zahlen genau dann konvergiert, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt.

Aufgabe 31: Beweise, dass eine monoton wachsende (beziehungsweise monoton fallende) Folge reeller Zahlen, die nicht konvergiert, bestimmt gegen ∞ (beziehungsweise gegen $-\infty$) divergiert.

Aufgabe 32: Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine rekursiv definierte Folge mit $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := 1 + \frac{1}{a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.
Hinweis: Untersuche das Monotonieverhalten der geraden sowie der ungeraden Folgeglieder.