Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Lösung zu Übungsblatt 8
15. Dezember 2015

Analysis I

im Wintersemester 2015/2016

Lösung zu Aufgabe 28: Wir zeigen per vollständiger Induktion nach n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

gilt. Als Induktionsanfang dient dabei $a_1 - a_0 = 1$ mit $n = 0$. Nun gilt

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2} - a_{n+1} = \frac{-a_{n+1} + a_n}{2} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$$

und nach Induktionsvoraussetzung

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Es seien nun $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n \geq 1$. Dann gilt

$$|a_m - a_n| = \left|\sum_{k=0}^{m-n-1} a_{m-k} - a_{m-k-1}\right| \leq \sum_{k=0}^{m-n-1} |a_{m-k} - a_{m-k-1}| \leq \sum_{k=0}^{m-n-1} (-1)^{m-k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-k-1}.$$

Mittels Änderung der Indizierung erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leq \sum_{\ell=n}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^\ell = \sum_{\ell=0}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^\ell - \sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^\ell = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^m}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^m\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ findet man nun ein $N \in \mathbb{N}$, $N > 0$, sodass für alle natürlichen $n \geq N$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \varepsilon$$

gilt. Somit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.
Des Weiteren erhalten wir mittels geometrischer Reihe

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$