Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Lösung zu Übungsblatt 2
3. November 2015

Analysis I
im Wintersemester 2015/2016

Aufgabe 8: Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ sowie $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$. Zeige, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \tag{Q}$$

gilt.

Lösung: Wir beweisen zu erst das allgemeine Kommutativgesetz der Addition (für die Multiplikation funktioniert der Beweis analog). Dieses besagt, dass es bei der Addition endlich vieler reeller Zahlen nicht auf die Reihenfolge ankommt, die Summanden somit beliebig umgeordnet werden können.

Lemma: *Es seien für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ sowie eine Permutation (Umordnung) $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ gegeben. Die Permutation π ordnet dabei jedem Index $k \in \{1, \ldots, n\}$ genau einen Index $\pi(k) \in \{1, \ldots, n\}$ zu. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{\pi(k)}. \tag{1}$$

Wir beweisen das Lemma mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der Summanden n.

Induktionsanfang. Für $n = 2$ gibt es für die Summation zweier Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ genau zwei Summationsreihenfolgen $x_1 + x_2$ und $x_2 + x_1$, wobei beide Summen nach dem Kommutativgesetz **(A.2)** gleich sind.

Induktionsvoraussetzung. Es gibt eine Anzahl von Summanden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sodass die Summationsreihenfolge beliebig vertauscht werden kann.

Induktionsbehauptung. Unter der Induktionsvoraussetzung kann man auch bei Hinzunahme eines weiteren Summenden die Summationsreihenfolge beliebig verändern.

Induktionsbeweis. Es seien Summanden $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n+1\} \to \{1, \ldots, n+1\}$ gegeben. Für den Fall, dass $\pi(n+1) = n+1$, bildet die Permuation

π die Menge $\{1,\ldots,n\}$ auf sich selbst ab. Somit folgt direkt aus der Induktionsvoraussetzung (IV)

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + x_{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{\pi(k)}\right) + x_{\pi(n+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} x_{\pi(k)}.$$

Sei also nun $\pi(n+1) \neq n+1$. Dann gibt es ein $i \in \{1\ldots,n\}$ mit $\pi(n+1) = i$ sowie ein $j \in \{1,\ldots,n\}$ mit $\pi(j) = n+1$. Wir definieren eine Abbildung $\pi^* : \{1,\ldots,n+1\} \to \{1,\ldots,n+1\}$ mit

$$\pi^*(k) := \begin{cases} \pi(k), & \text{falls} \quad k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\} \\ i, & \text{falls} \quad k = j \\ n+1, & \text{falls} \quad k = n+1. \end{cases}$$

Man macht sich leicht klar, dass π^* ebenfalls eine Permutation ist, also jedem Element der Menge $\{1,\ldots,n+1\}$ genau ein Element in $\{1,\ldots,n+1\}$ zuordnet. Nach dem oben betrachteten Fall gilt nun

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{n+1} x_{\pi^*(k)}.$$

Die beiden Summen $\sum_{k=1}^{n+1} x_{\pi^*(k)}$ und $\sum_{k=1}^{n+1} x_{\pi(k)}$ unterscheidet sich offenbar in der Summationsreihenfolge nur im j-ten und im $(n+1)$-ten Summanden. Es gilt somit mittels **(A.1)** (beziehungsweise dem allgemeinen Assoziativgesetz) und **(A.2)** (dreimal)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} x_{\pi^*(k)} &= \left(\sum_{k=1}^{i-1} x_{\pi^*(k)}\right) + x_{\pi^*(i)} + \left(\sum_{k=i+1}^{n} x_{\pi^*(k)}\right) + x_{\pi^*(n+1)} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{i-1} x_{\pi^*(k)}\right) + x_{\pi^*(n+1)} + \left(\sum_{k=i+1}^{n} x_{\pi^*(k)}\right) + x_{\pi^*(i)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} x_{\pi(k)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Die Aussage von Aufgabe 8 folgt nun auf einfach Weise aus dem obigen Lemma. In beiden Summen tauchen offenbar jeweils alle Summanden nur jeweils in anderer Reihenfolge auf. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} = (a_{1,1} + a_{1,2} + \cdots + a_{1,m}) + \cdots + (a_{n,1} + a_{n,2} + \cdots + a_{n,m})$$

und

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = (a_{1,1} + a_{2,1} + \cdots + a_{n,1}) + \cdots + (a_{1,m} + a_{2,m} + \cdots + a_{n,m}).$$

Da die Summanden einfach nur umsortiert sind, gilt mit dem Lemma die Gleichheit der beiden Summen.