Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Lösungen zu Übungsblatt 13
16. Februar 2016

Analysis I
im Wintersemester 2015/2016

Aufgabe 49: Es sei N die Menge aller endlichen Teilmengen der natürlichen Zahlen,

$$N := \{ A \subset \mathbb{N} \,|\, |A| < \infty \}.$$

Für jedes $A \in N$ gibt es somit ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $|A| = n$ gilt. Es bezeichne weiterhin N_n für $n \in \mathbb{N}$ die Menge aller Teilmengen der natürlichen Zahlen mit genau n Elementen,

$$N_n := \{ A \subset \mathbb{N} \,|\, |A| = n \}.$$

Wir zeigen induktiv, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge N_n abzählbar ist. Für $n = 0$ enthält N_0 nur die leere Menge und besitzt somit die Mächtigkeit $|N_0| = 1$. Für $n = 1$ gilt

$$N_1 = \Big\{ \{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots \Big\},$$

womit N_1 offenbar gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen ist.
Sei nun N_n für eine $n \in \mathbb{N}$ abzählbar. Betrachtet man ein $B \subset \mathbb{N}$ so ist klar, dass B genau dann ein Element von N_{n+1} ist, wenn es eine n-elementige Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ gibt und ein $k \in \mathbb{N} \setminus A$ mit $B = A \cup \{k\}$. Das heißt es gilt $B \in N_{n+1}$ genau dann, wenn ein $A \in N_n$ und ein $k \in \mathbb{N} \setminus A$ existieren, sodass $B = A \cup \{k\}$ gilt. Somit erhalten wir

$$N_{n+1} = \Big\{ A \cup \{k\} \,|, A \in N_n, k \in \mathbb{N} \setminus A \Big\}$$

beziehungsweise

$$N_{n+1} = \bigcup_{A \in N_n} \bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus A} \Big\{ A \cup \{k\} \Big\}.$$

Da N_n nach Induktionsvoraussetzung und $\mathbb{N} \setminus A$ für jedes $A \in N_n$ abzählbar. Folglich ist N_{n+1} eine Vereinigung abzählbar vieler endlicher (abzählbarer) Mengen und somit selbst abzählbar (vergleiche Satz 1 §9).
Abschließend erhalten wir wegen

$$N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$$

die Abzählbarkeit von N nach Satz 1 §9. $\square$

Wir definieren $A_n := \{ a_k \,|\, k \geq n\}$ und $s_n := \sup A_n$ für $n \in \mathbb{N}$.
Notwendigkeit. Es gelte $\limsup_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Auf Grund der Definition des Supremums als kleinste obere Schranke ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offenbar eine monoton fallende Folge. Somit folgt aus

$$a = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

dass $s_n \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $b \in A_n$, sodass $b > a-\varepsilon$ gilt. Daraus folgt (ii). Außerdem liefert die monotone Konvergenz der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \leq s_n < a + \varepsilon$ gilt, womit (i) gezeigt ist.
Hinlänglichkeit. Es gelten für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ die Aussagen (i) und (ii). Es gibt somit nach (i) ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Folglich gilt $s_n \leq a + \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und $\lim_{n\to\infty} s_n \leq a + \varepsilon$. Da ε beliebig gewählt ist, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} s_n \leq a.$$

Die Aussage (ii) liefert für alle $M \in \mathbb{N}$ die Existenz eines $m \geq M$, sodass $a_m > a - \varepsilon$ gilt. Nach Definition der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt somit $s_M > a - \varepsilon$ für alle $M \in \mathbb{N}$. Wir erhalten $\lim_{n\to\infty} s_n \geq a - \varepsilon$ und da ε beliebig gewählt ist

$$\lim_{n\to\infty} s_n \geq a.$$

Zusammen gilt also

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = a.$$

□

Bemerkung: Es gilt eine analoge Aussage für den Limes inferior.

Aufgabe 50: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und H die Menge ihrer Häufungspunkte. Wir zeigen zunächst, dass $\limsup_{n\to\infty} a_n$ ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\to\infty}$ ist. Auf Grund der Beschränktheit der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert das Supremum $K \in \mathbb{R}$ der Menge $\{ a_n \,|\, n \in \mathbb{N} \}$. Folglich ist auch jedes $b_n := \sup\{ a_k \,|\, k \geq n \}$ für $n \in \mathbb{N}$ durch K nach oben beschränkt. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist somit beschränkt und monoton, also konvergent gegen ein $b \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass keine Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b konvergiere. Es existiere also ein $\varepsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - b| \geq \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gelte. Die Aussaugen (i) und (ii) aus Aufgabe 49 stehen jedoch im Widerspruch dazu. Somit existiert eine gegen b konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, womit $b \in H$ gilt. Insbesondere ist H nichtleer. Wir betrachten nun einen beliebigen Häufungspunkt $a \in H$. Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert. Aus der Definition und der Monotonie von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt $b_k \geq b_{n_k} \geq a_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, womit

$$a = \lim_{k\to} a_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} b_k = b.$$

Somit ist b der größte Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = b = \sup H.$$

$\square$

Die Gleichung

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf H$$

folgt direkt aus der Beziehung $-\sup(-A) = \inf(A)$ für beliebige Mengen $A \subset \mathbb{R}$, wobei $-A := \{\, -x \mid x \in A \,\}$.
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge, so besitzt sie genau einen Häufungspunkt, womit $H = \{a\}$ gilt. Somit folgt nach dem ersten Teil

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a. \tag{1}$$

Gilt hingegen (1), so besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls genau einen Häufungspunkt und ist nach Voraussetzung beschränkt (folgt übrigens auch aus (1)). Dies ist äquivalent zur Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Aufgabe 51: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und H die Menge ihrer Häufungspunkte. Beweise, dass die Beziehungen

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup H \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \inf H$$

gelten. Zeige außerdem dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a$$

gilt.

Aufgabe 52: Es seien $a_n = 2^n\Big(1 + (-1)^n\Big) + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $b_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $c_{m+1} = \sqrt[m+1]{a_{m+1}}$. Wir untersuchen die jeweiligen Teilfolgen der geraden beziehungsweise ungeraden Folgenglieder. Es gilt

$$a_{2n} = 2^{2n+1} + 1, \quad a_{2n+1} = 1, \quad b_{2n} = \frac{1}{2^{2n+1} + 1}, \quad b_{2n+1} = 2^{2n+2} + 1$$

sowie

$$c_{2n+2} = \Big(2^{2n+3} + 1\Big)^{\frac{1}{2n+2}} \quad \text{und} \quad c_{2n+1} = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} b_{2n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = 1.$$

Mit Hilfe des Sandwich-Kriteriums

$$2 \cdot 2^{\frac{1}{2n+2}} \leq 2\left(2 + \frac{1}{2^{2n+2}}\right)^{\frac{1}{2n+2}} = c_{2n+2} \leq 2 \cdot 3^{\frac{1}{2n+2}}$$

sieht man, dass

$$\lim_{n\to\infty} 2 \cdot 2^{\frac{1}{2n+2}} = \lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot 3^{\frac{1}{2n+2}} = 2$$

gilt.

Somit erhalten wir aus der Definition der Limites superior und inferior

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \limsup_{n\to\infty} b_n = \infty, \quad \liminf_{n\to\infty} b_n = 0$$

sowie

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = 2 \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} c_n = 1.$$