Achim Ilchmann und Philipp Schmitz
Institut für Mathematik
TU Ilmenau

Sommersemester 2019

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 1

Aufgabe 1
Lösen Sie durch Separation der Variablen das Anfanswertproblem

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \left(\frac{x}{2-t}\right)^2, \qquad x(0) = 2$$

und diskutieren Sie die maximalen Existenzintervalle.

Aufgabe 2
Es seien $S \subset T \subset X$ und X ein metrischer Raum.
Die Menge S heißt *relativ offen in* T genau dann, wenn

$$\exists U \subset X \quad \text{offen} \quad : \; S = U \cap T.$$

Zeigen Sie

(i) Welche Form hat das Intervall $I \subset [a, b)$, $-\infty < a < b \leq \infty$, wenn I relativ offen in $[a, b)$ ist?

(ii) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

   (a) S ist relativ offen in T

   (b) $\forall x \in S \; \exists \varepsilon > 0 \; : \; \mathbb{B}(x, \varepsilon) \cap T \subset S$.

   (c) S ist offen in (T, d_T), wobeir $d_T := d|_{T \times T}$ die von X auf T induzierte Metrik ist.

(iii) S offen $\quad \Longrightarrow \quad$ S ist relativ offen in T.

(iv) Für T offen gilt: $S \subset T$ ist relativ offen in T genau dann, wenn S offen ist.

(v) Für $S \subset T$ ist relativ offen in T gilt: $x \in S$ ist innerer Punkt von S genau dann, wenn x innerer Punkt von T ist.

Aufgabe 3
Es sei J ein Intervall. Zeigen Sie, daß für alle $t, \tau \in J$ ein Intervall $J_0 \subset J$ existiert mit $t, \tau \in J_0$, J_0 ist relativ offen in J und der Abschluß $\bar{J}_0$ von J_0 ist kompakt und in J enthalten.

Aufgabe 4

Es seien $J = \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, und $x : (\alpha, \infty) \to G$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x^\infty \in G \quad \text{existiert} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x^\infty) = 0.$$