Achim Ilchmann und Philipp Schmitz
Institut für Mathematik
TU Ilmenau

Sommersemester 2019

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 2

Definition
Es sei S eine nichtleere Menge und $\preceq$ eine Relation auf S mit folgenden Eigenschaften:

(i) $x \preceq x$ für alle $x \in S$ (*Reflexivität*),

(ii) gilt $x \preceq y$ und $y \preceq z$ für $x, y, z \in S$, dann gilt auch $x \preceq z$ (*Transitivität*),

(iii) gilt $x \preceq y$ und $y \preceq x$ für $x, y \in S$, so ist $x = y$ (*Antisymmetrie*).

Die Relation $\preceq$ heißt *Halbordnung* oder *partielle Ordnung* auf S. Die Relation heißt *totale Ordnung*, wenn für alle Elemente $x, y \in S$

$$x \preceq y \quad \text{oder} \quad y \preceq x \tag{1}$$

gilt.

Ein Element $x \in S$ heißt *maximales Element* von S, wenn für $y \in S$ aus $x \preceq y$

$$x = y \tag{2}$$

folgt.

Ein Element $x \in S$ heißt *obere Schranke*, wenn für alle $y \in S$

$$y \preceq x \tag{3}$$

gilt.

Aufgabe 5
Untersuchen Sie, ob die folgenden Relationen Halbordnungen darstellen.

(i) Es sei S die Menge aller (unendlichen) Zahlenfolgen in $\mathbb{R}$. Für zwei Folgen $(x_n), (y_n) \in S$ gelte $(x_n) \preceq (y_n)$ genau dann, wenn (x_n) eine Teilfolge von (y_n) ist.

(ii) Es sei $S \subset \mathbb{R}^2$. Für $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in S$ gelte $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)$ genau dann wenn $x_1 \leq y_1$ und $x_2 \leq y_2$ gilt.

(iii) Es sei $S = f(T)$, wobei T eine nichtleere Menge mit einer Halbordnung $\preceq_T$ und $f : T \to S$ eine injektive Funktion ist. Es gelte $x \preceq y$ genau dann, wenn $f^{-1}(x) \preceq_T f^{-1}(y)$ gilt.

(iv) Es sei S die Potenzmenge einer Menge T. Für $x, y \in S$ sei $x \preceq y$ genau dann, wenn $x \subset y$.

Geben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung für (iii) und (iv) an, sodass $\preceq$ eine totale Ordnung auf S ist? Geben Sie für (ii) eine Menge S mit unendlich vielen Elementen an, sodass $\preceq$ eine totale Ordnung auf S darstellt.

Aufgabe 6
Es sei $\preceq$ eine Halbordnung auf S. Zeigen Sie, dass ein obere Schranke, falls diese existiert, eindeutig bestimmt ist und ein maximales Element darstellt. Zeigen Sie außerdem, dass im Falle der Existenz einer oberen Schranke, diese das einzige maximale Element ist.

Betrachten Sie erneut (ii) aus der vorhergehenden Aufgabe. Bestimmen Sie alle maximalen Elemente und alle oberen Schranken von S, falls

(i) S das (abgeschlossene) Dreieck ist, welches von den Punkten $(0,0),(0,1),(1,0)$ aufgespannt wird;

(ii) $S = B(0,1)$;

(iii) S das (abgeschlossene) Quadrat ist, welches von den Punkten $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ aufgespannt wird.

Aufgabe 7
Diskutieren Sie die Anzahl der Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}, \quad x(0) = 0. \tag{4}$$

Aufgabe 8
Bestimmen Sie die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_3 x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{5}$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 9
Bestimmen Sie eine maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = \frac{3}{2}(x(t))^2\sqrt{1-|t|}, \quad x(0) = 1 \tag{6}$$

auf $J \times G = [-1,1] \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 10
Bestimmen Sie eine maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = \big((1-t)(1-x(t))\big)^{-\frac{1}{2}}, \quad x(0) = 0 \tag{7}$$

auf $J \times G = (-\infty,1) \times (-\infty,1)$.