Achim Ilchmann und Philipp Schmitz
Institut für Mathematik
TU Ilmenau

Sommersemester 2019

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 3

Aufgabe 11
Bestimmen Sie maximale Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = (x(t))^2, \quad x(\tau) = \xi \quad \text{auf } J \times G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{1}$$

falls: (a) $(\tau, \xi) = (0, 1)$, (b) $(\tau, \xi) = (1, 0)$, (c) $(\tau, \xi) = (1, 1)$.

Aufgabe 12
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = t^3(x(t))^2, \quad x(\tau) = \xi, \quad \text{auf } J \times G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

(a) Finden Sie $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, sodass das Anfangswertproblem (2) eine maximale Lösung mit einem beschränkten Existenzintervall I besitzt.

(b) Finden Sie $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass das Anfangswertproblem (2) eine maximale Lösung mit Existenzintervall $I = J = \mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 13
Es seien $(\tau, \xi) \in J \times G$ und $f : J \times G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Definiere $g : J \times G \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$g(t, y) = (1, f(t, y)), \quad (t, y) \in J \times G. \tag{3}$$

Untersuchen Sie die Beziehung zwischen (maximalen) Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(\xi) = \tau \tag{4}$$

und

$$\dot{z}(t) = g(z(t)), \quad z(\tau) = (\tau, \xi). \tag{5}$$

Aufgabe 14
Es seien $J \times G = [0, \infty) \times \mathbb{R}$, $f : J \times G \to \mathbb{R}$ stetig. Es existiere $R > 0$, sodass für alle $t \in J$ und alle $y \in G$ mit $|y| > R$

$$y f(t, y) < 0 \tag{6}$$

gilt. Zeigen Sie, jede maximalen Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(\tau) = \xi, \quad (\tau, \xi) \in J \times G \tag{7}$$

existiert auf $I = J$.

Aufgabe 15
Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sowie $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetige Funktionen, sodass

$$\|g(t, y)\| \leq \gamma_1(t) + \gamma(t)\|y\| \quad \text{für alle } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{8}$$

gilt. Zeigen Sie, dass jede Lösung von

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t, x) \tag{9}$$

keine endliche Entweichzeit in positiver Zeitrichtung hat.
Hinweis: Variation der Konstanten und das Gronwall-Lemma könnten hilfreich sein.

Gronwall-Lemma
Es seien $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, sowie $u, \alpha : I \to \mathbb{R}$ und $\beta : I \to [0, \infty)$ stetige Funktionen, sodass

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)\,\mathrm{d}s \tag{10}$$

für alle $t \in I$ gilt. Dann gilt

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)\exp\left(\int_s^t \beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s \tag{11}$$

für alle $t \in I$. Ist α monoton wachsend, dann gilt sogar

$$u(t) \leq \alpha(t)\exp\left(\int_a^t \beta(s)\,\mathrm{d}s\right) \tag{12}$$

für alle $t \in I$.