Achim Ilchmann und Philipp Schmitz
Institut für Mathematik
TU Ilmenau

Sommersemester 2019

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 4

Aufgabe 16
Definiere für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ das Matrixpotential $\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(a) Für einen Jordanblock

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{k\times k} \tag{1}$$

bestimme man $\mathrm{e}^{J_k(\lambda)}$.

(b) Bestimme ein (komplexes) Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$, wobei A genau einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ hat und die geometrischer Vielfachheit von λ gleich 1 ist.

Aufgabe 17
Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Berechnen Sie dazu die jordansche Normalform $J = T^{-1}AJ$, sowie die Transformationsmatrix T.

Definition
Es sei $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, lokal Lipschitz-stetig. Zu jedem $\xi \in G$ existiert eine eindeutige maximale Lösung $\phi_\xi : I_\xi \to G$ mit dem Existenzintervall I_ξ des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = \xi$. Die Abbildung

$$\phi : D \to G, (t, \xi) \mapsto \phi(t, \xi) := \phi_\xi(t), \quad D = \big\{(t, \xi) \in \mathbb{R} \times G : t \in I_\xi\big\}, \tag{3}$$

heißt *lokaler Fluss* bezüglich f.

Aufgabe 18
Bestimmen Sie den lokalen Fluss $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, der von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y(1-y)$ erzeugt wird.

Aufgabe 19
Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(y) = f(y_1, y_1) = \begin{pmatrix} y_2 + y_1(1 - \|y\|^2) \\ -y_1 + y_2(1 - \|y\|^2). \end{pmatrix} \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass der lokale Fluss $\phi : D \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\phi(t, \xi) = \left(\|\xi\|^2 + (1 - \|\xi\|^2)\mathrm{e}^{-2t}\right)^{-\frac{1}{2}} R(t)\xi \quad \text{mit } R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

und

$$D = \left\{(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : \|\xi\|^2 + (1 - \|\xi\|^2)\mathrm{e}^{-2t} > 0\right\} \tag{6}$$

gegeben ist.
Hinweis: Betrachten Sie dazu $x = r(\cos(\theta), \sin(\theta))$, wobei r und θ die Anfangswertprobleme

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad r(0) = r_0 \quad \text{und} \quad \dot{\theta} = -1, \quad \theta(0) = \theta_0 \tag{7}$$

mit $r_0 = \|\xi\|$ und $\xi = r_0(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$ lösen. Zeigen Sie, dass dann x die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ löst.