Achim Ilchmann und Philipp Schmitz
Institut für Mathematik
TU Ilmenau

Sommersemester 2019

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 5

Aufgabe 20
Es sei $f : G \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $[0,1] \subset G \subset \mathbb{R}$. Des Weiteren gelte $f(0) = f(1) = 0$ und $f(y) > 0$ für alle $y \in (0,1)$. Bestimmen Sie die jeweils für $\xi \in [0,1]$ den Orbit $O(\xi)$ sowie die ω-Limesmenge $\Omega(\xi)$ der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$.

Aufgabe 21
Zeigen Sie, dass für die ω-Limesmenge $\Omega(\xi)$ und die α-Limesmenge $A(\xi)$

$$\Omega(\xi) = \bigcap_{\tau \in I_\xi \cap [0,\infty)} \overline{O^+(\phi(\tau,\xi))}, \quad A(\xi) = \bigcap_{\tau \in I_\xi \cap (-\infty,0]} \overline{O^-(\phi(\tau,\xi))} \tag{1}$$

gilt.

Aufgabe 22
Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^\top\} \to \mathbb{R}^2, \quad f(y) = f(y_1, y_1) = \begin{pmatrix} \frac{-y_2 + \frac{\tan y_1}{\sqrt{(\tan y_1)^2 + y_2^2}}}{1 + (\tan y_1)^2} \\ \tan y_1 + \frac{y_2}{\sqrt{(\tan y_1)^2 + y_2^2}} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Wie sehen die Lösungen der Differentialgleichungen $\dot{x} = f(x)$ für $\xi = (\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)^\top$ mit $|\xi_1| < \pi/2$ (qualitativ) aus? Geben Sie die ω-Limesmenge $\Omega(\xi)$ für diese ξ an und diskutieren Sie deren Zusammenhang.
Hinweis: Bestimmen Sie zuerst eine Lösung von $\dot{x} = g(x)$ für

$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^\top\} \to \mathbb{R}^2, \quad g(y) = g(y_1, y_1) = \begin{pmatrix} -y_2 + y_1/\|y\| \\ y_1 + y_2/\|y\| \end{pmatrix}. \tag{3}$$

mit Hilfe von Polarkoordinaten und transformieren sie diese anschließend mittels

$$(y_1, y_2)^\top \mapsto (\arctan(y_1), y_2)^\top.$$

Aufgabe 23
Es sei ϕ der lokale Fluss der autonomen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ für stetiges $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $\xi \in G$ heißt *periodischer Punkt*, falls es ein $T > 0$ gibt, sodass $\phi(T, \xi) = \xi$ gilt. In diesem Fall sei $T(\xi) := \inf\{t > 0 : \phi(t, \xi) = \xi\}$. Zeigen Sie:

(i) $\phi(T(\xi), \xi) = \xi$;

(ii) Gilt $\phi(T, \xi) = \xi$ für ein $T > 0$, dann gilt auch $\phi(nT, \xi) = \xi$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Außerdem existiert $m \in \mathbb{N}$, sodass $T = mT(\xi)$ falls $T(\xi) \neq 0$;

(iii) ξ ist ein stationärer Punkt genau dann, wenn $T(\xi) = 0$;

(iv) ξ ist ein periodischer Punkt genau dann wenn $\phi(I_\xi \cap (0, \infty), \xi) \cap \phi(I_\xi \cap (-\infty, 0), \xi) \neq \emptyset$. In diesem Fall gilt $O^+(\xi) = O^-(\xi) = O(\xi)$ und $\phi(t, \xi) = \phi(T(\xi) + t, \xi)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.