Achim Ilchmann und Philipp Schmitz
Institut für Mathematik
TU Ilmenau

Sommersemester 2019

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 6

Aufgabe 24
Betrachtem Sie das Räuber-Beute-Modell

$$\dot{x} = f(x), \quad f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1(y_2 - 1) \\ -(y_1 - 1)y_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Hierbei stellen x_1 die Räuberpopulation und x_2 die Beutepopulation dar. Zeigen Sie mit Hilfe einer Lyapunov-Funktion, dass $(1,1)^\top$ eine stabile Gleichgewichtslage ist.
Hinweis: Finde ein erstes Integral V, d.h. $V \in \mathbb{C}^1(G, \mathbb{R})$ mit $V_f(y) = 0$, mit Hilfe des Ansatzes $\nabla V(y) = (a + b/y_1, c + d/y_2)^\top$.

Aufgabe 25
Betrachten Sie das System

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + g(x_2), \tag{2}$$

wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist und $\lim_{t\to 0} g(t)/t = 0$ erfüllt. Zeigen Sie, dass $(0,0)^\top$ eine stabile Gleichgewichtslage des Systems ist.
Hinweis: Die Funktion $V(y) = \|y\|^2$ könnte nützlich sein.

Aufgabe 26
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion mit $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$ und $f^{(n)}(0) \neq 0$. Untersuchen Sie für die skalare Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) \tag{3}$$

die Stabilität der Ruhelage $\xi = 0$ in Abhängigkeit von n und dem Vorzeichen von $f^{(n)}(0)$.

Aufgabe 27
Untersuchen Sie die Ruhelagen der Pendelgleichung (ohne Reibungsterm)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -b\sin(x_1) \end{pmatrix}, \quad b > 0, \tag{4}$$

auf Stabilität.
Hinweis: Ein erstes Integral, sowie die Funktion $V(y) = y_1 y_2$ könnten hilfreich sein.