Achim Ilchmann und Philipp Schmitz
Institut für Mathematik
TU Ilmenau

Sommersemester 2019

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 7

Aufgabe 28

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(y-a) \\ \gamma x^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $\gamma > 0$ und $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge P der Gleichgewichte und zeigen Sie, dass für beliebige Anfangswerte die Lösung der Differentialgleichung für $t \to \infty$ gegen P strebt.

Hinweis: Verwenden Sie das Invarianzprinzip von LaSalle und die Funktion $V(x,y) = c_1 x^2 + c_2(y-b)^2$.

Aufgabe 29

Zeigen Sie, dass Barbălat's Lemma im Allgemeinen nicht mehr gültig ist, falls die zu betrachtende Funktion nicht gleichmäßig stetig ist.

Hinweis: Betrachten Sie

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t = 0, \\ 2\cos(t^2) - \frac{\sin(t^2)}{t^2} & \text{falls } t > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Aufgabe 30

Betrachten Sie das System

$$\dot{x} = y - x^3(a + bx^2), \quad \dot{y} = -x - y^3(c + dy^2) \tag{3}$$

über $G = \mathbb{R}^2$ mit positiven Konstanten a, b, c und d. Zeigen Sie, dass für alle ξ

$$[0, \infty) \subset I_\xi \quad \text{und} \quad \lim_{t \to \infty} \phi(t, \xi) \to 0 \tag{4}$$

gilt.

Aufgabe 31

Betrachten Sie das System

$$\dot{x} = x^2 \tanh(x)(1-y), \quad \dot{y} = x^3 \tanh(x) \tag{5}$$

über $G = \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie für $\xi \in \mathbb{R}^2$, dass der Halborbit $O^+(\xi)$ beschränkt ist und für die erste Komponente des lokalen Flusses $\phi(\cdot, \xi)$ stets $\phi_1(t, \xi) \to 0$ gilt.

Hinweis: Multiplizieren Sie die erste Gleichung mit x und integrieren Sie anschließend. Verwenden Sie außerdem das Integral-Invarianzprinzip.