Institut für Mathematik
Henrik Winkler
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 1
20. Oktober 2015

Funktionentheorie
im Wintersemester 2015/2016

Bearbeitung in der Übung am 26. Oktober 2015

Aufgabe 1: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Zeige die Äquivalenz der beiden Aussagen:

1. Der Grenzwert $f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \in \mathbb{C}$ existiert.
2. Es gibt ein $A \in \mathbb{C}$ und eine komplexe Funktion R mit $\lim_{|h| \to 0} \frac{R(h)}{|h|} = 0$, sodass gilt:
$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + R(z - z_0), \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

Aufgabe 2 (*Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen*): Zeige, dass eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann holomorph ist, wenn die reellen Funktionen

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \operatorname{Re}(f(x + \mathrm{i}y))$$

und

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \operatorname{Im}(f(x + \mathrm{i}y))$$

differenzierbar sind und die *Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen*

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_y v \\ \partial_y u &= -\partial_x v \end{aligned}$$

erfüllen.

Aufgabe 3: Prüfe die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf komplexe Differenzierbarkeit:

(i) $f(z) = \operatorname{Re}(z)$,

(ii) $f(z) = \bar{z}$,

(iii) $f(z) = z \operatorname{Re}(z) + \bar{z} \operatorname{Im}(z) + \bar{z}$.

Aufgabe 4: Bestimme die folgenden Kurvenintegrale

(i) $\int_{\partial D(0;1)} \frac{1}{|z|} \, \mathrm{d}z$,

(ii) $\int_{\partial D(0;1)} \bar{z} \, \mathrm{d}z$,

(iii) $\int_{\partial D(0;1)} (z^2 + 1) z^{-1} \, \mathrm{d}z$,

wobei die Kreisränder im mathematisch positiven Sinn durchlaufen werden.