Institut für Mathematik
Henrik Winkler
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 2
4. November 2015

Funktionentheorie
im Wintersemester 2015/2016

Bearbeitung in der Übung am 12. November 2015

Bemerkung: Eine Funktion wird *ganz* genannt, wenn sie holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 5 (Zweig des Logarithmus): Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei $f : D(z_0; r) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe, nullstellenfreie Funktion. Zeige die Existenz einer holomorphen Funktion $h : D(z_0; r) \to \mathbb{C}$, sodass für alle $z \in D(z_0; r)$

$$e^{h(z)} = f(z)$$

gilt. Die Abbildung h wird als *Zweig des Logarithmus von* f bezeichnet.

Aufgabe 6: Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Des Weiteren bezeichne $c_{n,a}$ den n-ten Koeffizienten der (lokalen) Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,a}(z-a)^n$ von f im Punkt a. Für jedes $a \in \mathbb{C}$ verschwinde mindestens ein Koeffizient $c_{n,a}$. Zeige, f ist ein Polynom.
Hinweis: Betrachte die Mengen $C_n = \{\, a \mid c_{n,a} = 0 \,\}$. *Verwende außerdem den Identitätssatz.*

Aufgabe 7 (Satz von Liouville): Es sei f eine ganze Funktion. Zeige, ist f beschränkt, so ist f konstant.

Aufgabe 8 (Fundamentalsatz der Algebra): Zeige, dass jedes komplexe Polynom vom Grad $n \geq 1$ mindestens eine komplexe Nullstelle besitzt.
Hinweis: Verwende den Satz von Liouville.