Institut für Mathematik
Henrik Winkler
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 3
3. Dezember 2015

Funktionentheorie
im Wintersemester 2015/2016

Bearbeitung in der Übung am 7. Dezember 2015

Aufgabe 9: Es seien f und g ganze Funktionen mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass dann eine komplexe Konstante c mit $0 < |c| \leq 1$ existiert, sodass $f = cg$ gilt.

Aufgabe 10: (Konvergenzsatz von Weierstraß) Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $(f_n)_{\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Ω holomorpher Funktionen. Des Weiteren konvergiere die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, das heißt für jeden Punkt in Ω existiert eine offene Umgebung U um diesen Punkt, in der $(f_n|_U)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|_U$ konvergiert. Zeige, dass f dann ebenfalls holomorph ist. Was gilt für die Ableitungen der Funktion f?

Aufgabe 11: Es seien p und q zwei Polynome, wobei der Grad von q um mindestens 2 größer sei als der Grad von p. Die rationale Funktion $R = \frac{p}{q}$ habe keine Polstellen auf der reellen Achse. Zeige, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{z\in\mathbb{C}^+} \mathrm{res}_z R \quad \text{für} \quad \mathbb{C}^+ := \{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \,\}$$

gilt! Berechne den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 12: Zeige, dass für $\lambda > 1$ die Gleichung

$$z\mathrm{e}^{\lambda - z} = 1$$

genau eine Lösung $z \in D(0;1)$ besitzt. Zeige außerdem, dass diese Lösung positiv ist.