Institut für Mathematik
Henrik Winkler
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 4
8. Dezember 2015

Funktionentheorie
im Wintersemester 2015/2016

Bearbeitung in der Übung am 14. Dezember 2015

Aufgabe 13: Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge mit $\overline{D(0;1)} \subset \Omega$. Es sei außerdem $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, sodass $|f(z)| > 2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt. Außerdem gelte $f(0) = 1$. Besitzt f eine Nullstelle in der offenen Kreisscheibe $D(0;1)$?

Aufgabe 14: Beweise, dass

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt.

Hinweis: Betrachten einen Weg von 0 *nach* R *nach* $R\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ *nach* 0.

Aufgabe 15: Zeige, dass für $\lambda > 1$ die Gleichung

$$z\mathrm{e}^{\lambda - z} = 1$$

genau eine Lösung $z \in D(0;1)$ besitzt. Zeige außerdem, dass diese Lösung positiv ist.

Aufgabe 16: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ reellwertige, harmonische Funktionen, sodass uv harmonisch ist. Zeige, dass dann u konstant oder v konstant ist oder eine reelle Konstante $C \neq 0$ existiert, sodass $u_x = Cv_y$ und $u_y = -Cv_x$ gilt.

Hinweis: Betrachte die Funktionen $h = v_y + iv_x$ *und* $g = u_x - iu_y$*, untersuche das Nullstellenverhalten von* h *und die Funktion* g/h*. Verwende außerdem den Satz von der offenen Abbildung.*