Institut für Mathematik
Henrik Winkler
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
**ILMENAU**

Übungsblatt 6
18. Januar 2016

# Funktionentheorie

**im Wintersemester 2015/2016**

Bearbeitung in der Übung am 25. Januar 2016

Es bezeichne $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Erweiterung der komplexen Zahlenebene um einen Punkt im Unendlichen, wobei $\bar{\mathbb{C}}$ als *Riemannsche Zahlenkugel* bezeichnet wird.

Eine Abbildung $f : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$,

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty, & \text{falls } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}, & \text{falls } z = \infty \end{cases}$$

für komplexe Zahlen $a, b, c$ und $d$ mit $ad - bc \neq 0$ heißt *Möbiustransformation*. Für den Fall $c = 0$ sei dabei $-\frac{d}{c} := \frac{a}{c} := \infty$. Die Menge aller Möbiustransformationen bezeichnen wir mit $\mathcal{M}$.

**Aufgabe 21**: Zeige die nachfolgenden Aussagen beziehungsweise beantworte die Fragen.

(i) Jede Möbiustransformation ist eine Bijektion.

(ii) Die Menge $\mathcal{M}$ bildet zusammen mit der Hintereinanderausführung $\circ : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$,

$$(f \circ g)(z) := f(g(z)), \quad \text{für } f, g \in \mathcal{M},\ z \in \bar{\mathbb{C}},$$

eine nichtkommutative Gruppe.

(iii) Wie viele Fixpunkte besitzt eine Möbiustransformation $f \in \mathcal{M}$ in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in \mathbb{C}$? Was gilt für eine Möbiustransformation mit mehr als zwei Fixpunkten?

**Aufgabe 22**: Zeige, dass für jeweils drei paarweise verschiedene Urbildpunkte $z_1, z_2, z_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ und drei paarweise verschiedene Bildpunkte $x_1, x_2, x_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ genau eine Möbiustransformation $f \in \mathcal{M}$ mit

$$f(z_1) = x_1, \quad f(z_2) = x_2 \quad \text{und} \quad f(z_3) = x_3$$

existiert.

*Hinweis: Konstruiere zu paarweise verschiedenen Punkten $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ eine Möbiustransformation $h \in \mathcal{M}$ mit $h(\xi_1) = 0$, $h(\xi_2) = 1$ und $h(\xi_3) = \infty$.*

**Aufgabe 23**: Zeige, dass eine Möbiustransformation $f \in \mathcal{M}$ die reelle Achse genau dann auf sich selbst abbildet, wenn die Koeffizienten $a, b, c$ und $d$ reell gewählt werden können.

Institut für Mathematik
Henrik Winkler
Philipp Schmitz



**Aufgabe 24**: Finde ein hinreichendes und notwendiges Kriterium, unter welchem eine Möbiustransformation $f \in \mathcal{M}$ die obere Halbebene $\mathbb{C}^+ = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \}$ bijektiv auf sich selbst abbildet.