

Blatt 2

Spezielles lineares Modell und Kleinste-Quadrate-Schätzer

Aufgabe 2.1 Projektionen

Beweisen Sie Lemma 2.2 aus der Vorlesung.

Aufgabe 2.2 Einfache lineare Regression

Betrachten Sie das Modell der einfachen linearen Regression,

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mathbf{Cov} \varepsilon = \sigma^2 \mathbf{I}_n.$$

- Nehmen Sie an, dass es sich um ein SLM handelt – wann ist dies der Fall?
- Bestimmen Sie den LSE von β sowie seine Kovarianzmatrix; drücken Sie den LSE dabei durch empirische Korrelation und empirische Standardabweichungen aus.
- Wenn man die Rollen von y und x vertauscht, ergibt sich dann als Schätzer für die Geradensteigung das Inverse von β_2 ? Erklären Sie!
- Man hätte wohl leichter mit dem folgendermaßen umparametrisierten Modell gearbeitet:

$$y_i = \alpha_1 + \alpha_2(x_i - \bar{x}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mathbf{Cov} \varepsilon = \sigma^2 \mathbf{I}_n$$

mit $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Warum? Sind die beiden Modelle äquivalent? Wie geht dieses Modell aus dem ersten hervor? Geben Sie den LSE von α sowie dessen Kovarianzmatrix an.

Aufgabe 2.3 Medikamentenstudie

Betrachten Sie Beispiel 1.5 zur klinischen Studie hinsichtlich der Wirkung zweier Medikamente. Jeweils n_1 Probanden erhalten das Medikament 1, n_2 Probanden das Medikament 2 und n_3 Probanden ein Placebopräparat. Es wird jeweils für den Probanden i die Differenz y_i des Blutdrucks vor und eine Stunde nach der Gabe des jeweiligen Präparates protokolliert.

- Modellieren Sie den Zusammenhang zwischen den Blutdruckdifferenzen und den Präparaten als SLM $y = X\beta + \varepsilon$. Bestimmen Sie den LSE für β sowie dessen Kovarianzmatrix.
- Beschreiben sie den Unterschied hinsichtlich der Wirkung beider Medikamente als LPF $A\beta$ und bestimmen Sie für diese einen LUE sowie dessen Kovarianzmatrix.
- Modellieren Sie nun direkt so, dass einer der Modellparameter den Placebo-Effekt beschreibt und die beiden anderen Parameter die Differenz zwischen den beiden Medikamenten und Placebo. Wiederholen Sie für dieses Modell Aufgabenteile a) und b) und vergleichen Sie.