Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2013/14

Analysis I

10. Übungsserie zur Abgabe am 16.12.2013

Thema: Supremum, Infimum, Limes superior und Limes inferior

Bitte geben Sie drei der unten stehenden Aufgaben ab. Die Hausaufgaben 33 und 34 zählen dabei als eine Aufgabe.

Hausaufgabe 30

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente aber nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen. Man beweise, dass zu einem beliebig vorgegebenen $c \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ existiert, die gegen c konvergiert.

Hausaufgabe 31

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

(b) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Hausaufgabe 32

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} A{*}B = \sup A \cdot \sup B$, mit nichtleeren Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ und $A{*}B := \{a \cdot b : a \in A,\ b \in B\}$.

(b) Es gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} A + B = \sup A + \sup B$, mit nichtleeren Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ und der *Minkowski-Summe* $A + B := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$.

Zeigen Sie $\sup A = -\inf(-A)$ mit $-A := \{-a : a \in A\}$ und übertragen Sie die gewonnen Aussagen aus (a) und (b) auf das Infimum.

Definition

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir definieren den *Limes superior* dieser Folge durch

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \big(\sup\{a_k \mid k \geq n\}\big),$$

und ihren *Limes inferior* durch

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \big(\inf\{a_k \mid k \geq n\}\big).$$

Bemerkung

Die Folge $(\overline{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\overline{a_n} := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$ ist monoton fallend ($\overline{a_n} = +\infty$ ist möglich). Analog ist die Folge $(\underline{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\underline{a_n} := \inf\{a_k \mid k \geq n\}$ monoton wachsend ($\underline{a_n} = -\infty$ ist möglich).

Hausaufgabe 33 (2P)
Berechnen Sie Limes superior und Limes inferior der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für

(a) $a_n := n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) $a_n := (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hausaufgabe 34 (3P)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Man beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent zueinander sind.

(a) Es gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(b) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

  (i) Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < a + \varepsilon$.
  (ii) Für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ gilt $a_m > a - \varepsilon$.

Bemerkung:
Analog kann man zeigen, dass $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = a$ äquivalent ist zur folgenden Aussage:
Für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

(i) Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > a - \varepsilon$.

(ii) Für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ gilt $a_m < a + \varepsilon$.

Hausaufgabe 35
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und H die Menge ihrer Häufungspunkte. Man zeige:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup H,$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf H.$$